令和7年度 (10月期入学) 及び 令和8年度
金沢大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験
数物科学専攻計算科学コース

専門科目

注意事項

1. 問題冊子は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文10ページであり，答案用紙は４枚，下書用紙は１枚である。
3. 数学 (I〜IV) と基礎物理 (V〜VIII) と計算機 (IX，X) の３分野の中から２分野以上の問題４問を選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。
4. １問につき１枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面においては上部 (表の横線の上に相当する部分) は使用しないこと。
5. 問題冊子と下書用紙は持ち帰ること。

（次のページから問題が始まります。）

I

以下の問いに答えよ。

問１　極限

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$$

を求めよ。

問２　$a, b > 0$ かつ $0 < t < 1$ のとき，次の不等式を示せ。

$$a^t + b^t > (a+b)^t$$

問３　自然数 n に対して，積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ の値を求めよ。さらに不等式 $I_{2n+2} < I_{2n+1} < I_{2n}$ を利用して，次の式を導け。

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \times \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \times \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \times \cdots$$

II

以下の問いに答えよ。

問1　次の関数 $f(x,y)$ 及び $g(x,y)$ が原点で連続であるかどうか確認せよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

問2　$\mathbb{R}^2$ の領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$ に対して広義積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

の値を求めよ。

III

$\mathbb{R}^3$ を 3 次元列ベクトルの空間とする。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ の標準内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ と書く。このとき，以下の問いに答えよ。

問１　$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする。$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の一次結合全体のなす $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V = \{c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{w} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

の正規直交基底を一組求めよ。

問２　問１の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を用いて，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \rangle \end{pmatrix}$$

で定める。f の階数を求めよ。

問３　問２で定義した写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その正規直交基底を一組求めよ。

問４　P を 3×3 の直交行列とする。P による線形変換は内積を保つこと，つまり任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ について

$$\langle P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

が成り立つことを証明せよ。

IV

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える。自然数 n について

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

問１　A の固有値を全て求めよ。

問２　A の各固有値について固有空間の基底を一組求めよ。

問３　すべての自然数 n について $a_n = b_n + c_n$ が成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ。

問４　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

V

xy 平面内で，半径 R の円周上を運動している質点について考える。質点の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分は，$(x, y) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$ と表される。ω は正の定数であるとして，円運動の周期は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ で与えられる。以下の問いに答えよ。

問１ 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ の成分 v_x,v_y を ω, x, y を用いて表せ。

問２ 質点の軌道をグラフに描き, 時刻 $t = 0$ から $t = \dfrac{7T}{8}$ まで $\dfrac{T}{8}$ ごとに速度 $\boldsymbol{v}$ の概略を矢印で描け。矢印の始点は質点の位置とする。

問３ 速度 $\boldsymbol{v}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成す角度 $\theta_1 (0 \leq \theta_1 \leq \pi)$ を求めよ。

問４ 質点の加速度 $\boldsymbol{a}$ の成分 a_x, a_y を ω, x, y を用いて表せ。

問５ 質点の軌道をグラフに描き, 時刻 $t = 0$ から $t = \dfrac{7T}{8}$ まで $\dfrac{T}{8}$ ごとに加速度 $\boldsymbol{a}$ の概略を矢印で描け。矢印の始点は質点の位置とする。

問６ 速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ の成す角度 $\theta_2 (0 \leq \theta_2 \leq \pi)$ を求めよ。

VI

断面が半径 a の円である円柱状の導線の軸方向に一様に電流 $I(>0)$ が流れている場合を考える。導線は軸方向に無限に長いとする。導線の軸を z 軸とし，z 軸の正の向きを電流が流れる方向にとる。軸からの距離を r，真空および導線の透磁率は μ_0 とする。以下の問いに答えよ。

問 1　電流密度の大きさを求めよ。

問 2　導線の内側 $(r < a)$ での磁束密度の大きさを求めよ。

問 3　導線の外側 $(r > a)$ での磁束密度の大きさを求めよ。

問 4　磁束密度の大きさを r の関数としてグラフに図示せよ。

VII

ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有関数 ψ は時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

に従う。E はエネルギーである。
１次元の井戸型ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考える。位置座標を x で表す。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。$\hbar$ はディラック定数である。以下の問いに答えよ。

問１ エネルギー固有値 ϵ_n および規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ は次のように与えられる。

$$\epsilon_n = \boxed{\text{ア}}\,n^2, \quad \psi_n(x) = \boxed{\text{イ}}\sin\left(\boxed{\text{ウ}}\,x\right) \qquad \left(\boxed{\text{イ}} > 0\right).$$

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる式を求めよ。ただし，n は正の整数である。

問２ $N(\epsilon)$ はエネルギー ϵ よりも低いエネルギー ϵ_n の状態の数とする。$N(\epsilon)$ は $n <$ $\boxed{\text{エ}}$ を満足する n の個数に等しい。$\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる式を求めよ。

問３ $N(\epsilon)$ を求めよ。必要なら，ガウスの記号 [X] (X を超えない最大の整数を表す記号) を用いてもよい。

問４ $\boxed{\text{エ}} \gg 1$ の場合には，$N(\epsilon)$ が ϵ に対して連続的に変化すると考えてよい。このとき状態密度 $D(\epsilon)$ は $D(\epsilon) \equiv \dfrac{dN(\epsilon)}{d\epsilon}$ として定義される。$D(\epsilon)$ を求めよ。

以下，２次元の正方井戸型ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考える。位置座標を x, y で表す。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x,y), \quad V(x,y) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a \quad \text{and} \quad 0 < y < a) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。エネルギー固有値 ϵ_{n_x,n_y} は $\boxed{\text{ア}}\left({n_x}^2 + {n_y}^2\right)$ のように与えられる。ただし，n_x, n_y は正の整数である。ϵ よりも低い ϵ_{n_x,n_y} の状態の数 $N(\epsilon)$ は，XY 平面上で $X^2 + Y^2 < \boxed{\text{オ}}^{\,2}, X > 0, Y > 0$ で表される領域内の格子点 (n_x, n_y) の個数に等しい。$\boxed{\text{オ}} \gg 1$ のとき格子点の個数は領域の面積を単位格子の面積で除した量で近似できる。以下の問いに答えよ。

問５ $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまる式を求めよ。

問６ $N(\epsilon)$ を求めよ。

問７ $D(\epsilon) \equiv \dfrac{dN(\epsilon)}{d\epsilon}$ を求めよ。

VIII

スピン $\frac{1}{2}$ の粒子が磁場 $H\ (>0)$ の中におかれると，そのエネルギー準位は，$-\mu H$ と μH の二準位であり，磁場方向の磁気モーメントはそれぞれ $\mu\ (>0)$，$-\mu$ である。このような粒子 N 個からなる系が，温度 T に保たれているとする。ただし，粒子間に働く相互作用はなく，N 個の粒子は格子点に固定されているとする。ボルツマン定数は k_{B} とする。カノニカル分布を用いて，以下の問いに答えよ。

問１ 系の分配関数 Z を求めよ。

問２ 系のエネルギーの平均値 U を求めよ。

問３ 系のヘルムホルツ自由エネルギーは $F=-k_{\mathrm{B}}T\log Z$ である。このとき，$X=-\dfrac{\partial F}{\partial H}$ と定義する。X を計算せよ。

問４ X と U の関係を述べよ。

問５ X の物理的意味を述べよ。

問６ H が小さいとき ($\mu H \ll k_{\mathrm{B}}T$)，$X$ を H の一次関数として表せ。

問７ $\dfrac{X}{\mu N}$ を $\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu H}$ の関数として，そのグラフの概形を描け。

IX

10 進法で表示した正の整数は，どの隣接する 2 桁の差の絶対値もちょうど 1 である場合に「rolling number」と呼ばれる。例えば 2101 や 9876 は 4 桁の rolling number である。一方で 3431 や 8901 は rolling number ではない。

Python，Fortran または C 言語で，4 桁の rolling number の個数を計算するプログラムを書け。

X

質量 m の質点の時刻 t における位置を $x(t)$, 速度を $v(t)(=\dfrac{dx(t)}{dt})$ とする。力 $F(x)$ のもとでの運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t))$$

の数値解法を考える。まず $x(t \pm \Delta t)$ を Δt について 2 次のテーラー展開で近似する。

$$x(t \pm \Delta t) \approx x(t) \pm \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + \frac{d^2x(t)}{dt^2}\frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

$x(t+\Delta t)$ と $x(t-\Delta t)$ との和と差をとると, 以下の 2 次精度差分近似公式が得られる。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \left\{x(t+\Delta t) - \boxed{\text{(a)}}\, x(t) + \boxed{\text{(b)}}\, x(t-\Delta t)\right\} / \left\{\boxed{\text{(c)}}\,(\Delta t)^2\right\},$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \left\{x(t+\Delta t) - \boxed{\text{(d)}}\, x(t-\Delta t)\right\} / \left(\boxed{\text{(e)}}\,\Delta t\right).$$

N を正の整数とし, $t_i = i\Delta t$, $x_i = x(t_i)$, $v_i = v(t_i)$, $a_i = \dfrac{F(x_i)}{m}$　$(i = 0, 1, \ldots, N)$ とする。以下の手順 (i)–(iii) で $t_i, x_i, v_i\ (i = 0, 1, \ldots, N)$ の値を標準出力に出力する。

手順 (i)　x_0, v_0 に初期値 $x(0), v(0)$ を代入する。 t_0, x_0, v_0 を出力し, 以下の式を計算する。

$$x_1 = x_0 + v_0\,\Delta t + a_0\,\frac{(\Delta t)^2}{2}.$$

手順 (ii)　$i = 1$ から $i = N-1$ まで以下の漸化式を逐次的に計算し, t_i, x_i, v_i を出力する。

$$x_{i+1} = \boxed{\text{(a)}}\, x_i - \boxed{\text{(b)}}\, x_{i-1} + \boxed{\text{(c)}}\, a_i\,(\Delta t)^2,$$

$$v_i = \left(x_{i+1} - \boxed{\text{(d)}}\, x_{i-1}\right) / \left(\boxed{\text{(e)}}\,\Delta t\right).$$

手順 (iii)　以下の式を計算し, t_N, x_N, v_N を出力する。

$$v_N = \frac{x_N - x_{N-1}}{\Delta t} + a_N\,\frac{\Delta t}{2}.$$

なお, x_1 と v_N の計算には $x(t \pm \Delta t)$ の Δt について 2 次のテーラー展開をそれぞれ利用した。以下の問いに答えよ。

問 1　文章中の (a)–(e) に当てはまる正の整数を答えよ。

問 2　上の手順を実行するプログラムのソースコードを，C 言語，Fortran，Python のいずれかで書け。
ただし，$\dfrac{F(x)}{m} = -x$, $x(0) = 1.0$, $v(0) = 0.0$, $N = 200$, $\Delta t = 0.1$ とせよ。