解答 I

問１ n を x とおくと, $x(\sqrt[x]{2}-1)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$ の $x\to\infty$ のときの極限は $0/0$ の不定形である。

$$\frac{(2^{\frac{1}{x}}-1)'}{(\frac{1}{x})'}=\frac{2^{\frac{1}{x}}\log 2(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=2^{\frac{1}{x}}\log 2\to\log 2\quad(x\to\infty)$$

が成り立つため, ロピタルの定理を適用することができて, 求める極限は $\log 2$ である。

問２ $x>0$ に対して $f(x)=x^t+b^t-(x+b)^t>0$ を示せばよい。

$$f'(x)=tx^{t-1}-t(x+b)^{t-1}=t(x^{t-1}-(x+b)^{t-1})$$

$x^{t-1}>(x+b)^{t-1}\quad(0<t<1)$ より $f'(x)>0$ $(x>0)$ となる。$f(x)$ は単調増加で $f(0)=0$ なので $f(x)>0$ を得る。

問３ $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ dx$ とおくと部分積分により $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ を得る。したがって $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\geq 2)$ と $I_0=\dfrac{\pi}{2},I_1=1$ より

$$I_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & n\text{ is even}\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & n\text{ is odd}\end{cases}$$

$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ で $0\leq\cos x\leq 1$ であることから導かれる不等式 $I_{2n+2}<I_{2n+1}<I_{2n}$ を用いると

$$\frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{\pi}{2}<\frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)}\times\frac{(2n-2)^2}{(2n-1)(2n-3)}\times\cdots\times\frac{2^2}{3\cdot 1}<\frac{\pi}{2}$$

が成立する。$n\to\infty$ を考えると両辺が $\dfrac{\pi}{2}$ に収束するので，求める式が得られる。

解答 II

問１　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，$|f(x,\ y)| = r^2\cos^2\theta\sin^2\theta \le r^2 \to 0 \quad (r \to 0)$ より $f(x,\ y)$ は原点で連続。一方，$x = y$ のとき $g(x,\ y) = \frac{1}{2}$，$x = -y$ のとき $g(x,\ y) = -\frac{1}{2}$ で，$g(x,\ y)$ は原点で不連続。

問２　$\epsilon > 0$ に対して $D_\epsilon = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1 - \epsilon\}$ とおくと被積分関数は有界となる。極座標変換をして積分を計算すると

$$\iint_{D_\epsilon} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi(1-\sqrt{\epsilon}) \to 2\pi \quad (\epsilon \to 0)$$

したがって求める積分の値は 2π である。

解答 III

問１　例えば

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} \right\}$$

が V の正規直交基底となる。

問２　階数 $\operatorname{rank} f$ は 2 に等しい。

問３　核 $\operatorname{Ker} f$ の次元は $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rank} f = 3 - 2 = 1$ である。その正規直交基底として例えば

$$\left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

がとれる。

問４　直交行列 P は ${}^tP = P^{-1}$ を満たす。よって、

$$\langle P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y}\rangle = \langle {}^tPP\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$$

が成り立つ。

解答 IV

問１　A の固有値は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ である。

問２　$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の固有空間の基底は例えば $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$ がとれる。

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ の固有空間の基底は例えば $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$ がとれる。

問３

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}=AA^n=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ b_n & c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+b_n & b_n+c_n\\ a_n & b_n\end{pmatrix}$$

となり、$a_n=b_{n+1}=b_n+c_n$ であることが帰納的に示される。

問４　$P=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$ であり，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$ をみたす。ゆえに $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0\\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\end{pmatrix}$ となり,

$$A^n=P\begin{pmatrix}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0\\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}\\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}\end{pmatrix}$$

が成り立つ。したがって $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$ となる。

解答 V

問 1　$x = R\cos\omega t, y = R\sin\omega t$ であるから，$v_x \equiv \dfrac{dx}{dt} = -\omega R \sin\omega t = -\omega y,\ v_y \equiv \dfrac{dy}{dt} = \omega R\cos\omega t = \omega x,$

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-\omega y, \omega x).$$

問 2　図 1(a) は速度 $\boldsymbol{v}$ の概略図である。

問 3　$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ より，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

問 4　$\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{dv_x}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}\right) = (-\omega^2 x, -\omega^2 y).$

問 5　図 1(b) は加速度 $\boldsymbol{a}$ の概略図である。

問 6　$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ より，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

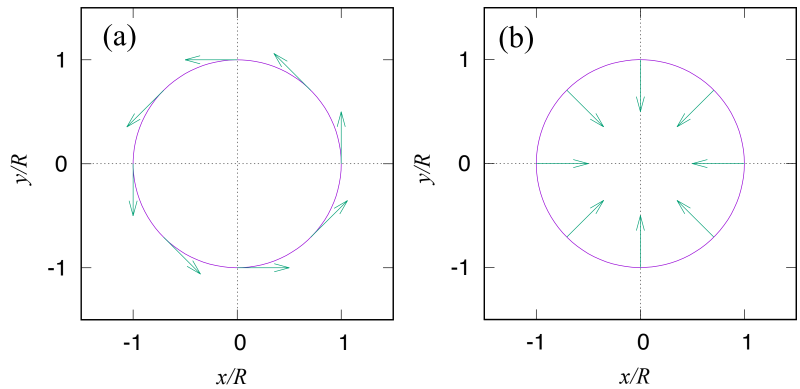


図 1: (a) 問２の概略図。矢印は速度。(b) 問５の概略図。矢印は加速度。

解答 VI

問 1　断面積が πa^2 より，電流密度は $\dfrac{I}{\pi a^2}$.

問 2　磁束密度の大きさを B とすると，アンペールの法則より，$2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 \dfrac{I}{\pi a^2}$，よって $B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$.

問 3　アンペールの法則より，$2\pi r B = \mu_0 \pi a^2 \dfrac{I}{\pi a^2}$，よって $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

問 4　図 2 に示す。

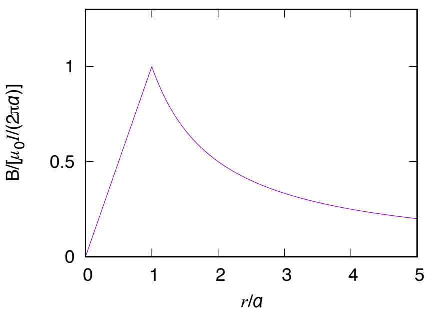


図 2: 問 4 のグラフ

解答 VII

問１ $0 < x < a$ のとき，境界条件から, $\sin kx$ が $\hat{H}\psi = E\psi$ の解となり，$E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$. よって，$\psi(a) = \sin ka = 0$ より，$ka = n\pi$ であるから，$k = \dfrac{n\pi}{a}$. したがって，$E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \equiv \epsilon_n$ となり，$\boxed{\text{ア}}$ は $\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

固有関数は $\psi_n(x) = A\sin\dfrac{n\pi}{a}x$ $(A > 0)$ を規格化して，$A = \sqrt{\dfrac{2}{a}}$.

すなわち，$\boxed{\text{イ}}$ は $\sqrt{\dfrac{2}{a}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ は $\dfrac{n\pi}{a}$.

問２ $\epsilon > \epsilon_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$ より，$n < \dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}$. $\boxed{\text{エ}}$ は $\dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}$.

問３ $N(\epsilon) = \left[\dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}\right]$.

問４ $N(\epsilon) \simeq \dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}$ であるから，$D(\epsilon) = \dfrac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \simeq \dfrac{d}{d\epsilon}\left(\dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}\right) = \dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{\dfrac{m}{2\epsilon}}$.

問５ $\epsilon > \epsilon_{n_x,n_y} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left({n_x}^2 + {n_y}^2\right)$ より，${n_x}^2 + {n_y}^2 < \dfrac{2ma^2\epsilon}{\pi^2\hbar^2} = \left(\dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}\right)^2$.

よって，(n_x, n_y) を XY 平面上の格子点と考えると，$\boxed{\text{オ}}$ は $\dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}$.

問６ $N(\epsilon) \simeq \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2m\epsilon}\right)^2 = \dfrac{ma^2\epsilon}{2\pi\hbar^2}$.

問７ $D(\epsilon) = \dfrac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \simeq \dfrac{d}{d\epsilon}\left(\dfrac{ma^2\epsilon}{2\pi\hbar^2}\right) = \dfrac{ma^2}{2\pi\hbar^2}$.

解答 VIII

問 1　一粒子についての分配関数は $2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$ である。粒子間に相互作用はないため $Z=\left(2\cosh\left(\frac{\mu H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right)^N$ となる。

問 2　$U=-\dfrac{1}{Z}\dfrac{\partial Z}{\partial\beta}\quad(\beta=1/(k_{\mathrm{B}}T))$ より，$U=-NH\mu\tanh\left(\dfrac{\mu H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$ を得る。

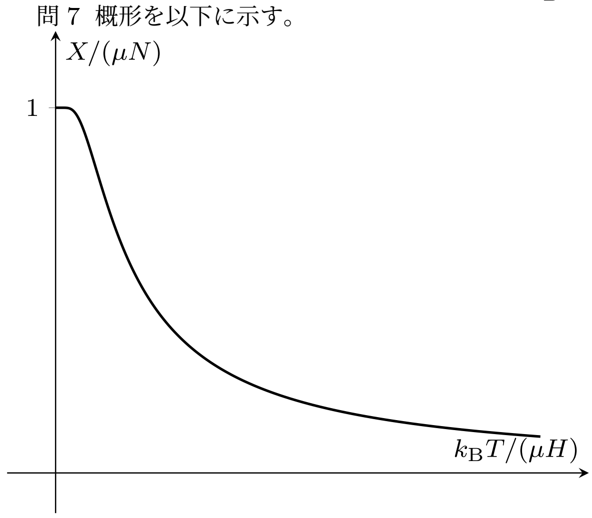
問 3　$X=N\mu\tanh\left(\frac{\mu H}{k_{\mathrm{B}}T}\right).$

問 4　問 2，3 より $U=-XH.$

問 5　X は磁場方向の磁気モーメントの平均値を表す。

問 6　$\tanh(x)\simeq x\ (|x|\ll 1)$ より，　$X=N\dfrac{\mu^2 H}{k_{\mathrm{B}}T}$ となる。

問 7　概形を以下に示す。



解答 IX

解答例として，Python 言語によるプログラムの例を挙げる。

```
def is_rolling(n):
    digits = [int(d) for d in str(n)]
    for i in range(3):
        if abs(digits[i] - digits[i+1]) != 1:
            return False
    return True

k = 0
for n in range(1000, 10000):  # 4-digit numbers
    if is_rolling(n):
        k += 1

print("Number of 4-digit rolling numbers =", k)
```

解答 X

問 1　(a) 2 (b) 1 (c) 1 (d) 1 (e) 2

問 2　C 言語によるプログラム例

```
#include <stdio.h>
int main()
{
  int N = 200;
  double x[N+1], v[N+1];
  double dt = 0.1;
//手順 (i)
    x[0] = 1.0;
    v[0] = 0.0;
    printf("%4.1f %8.3g %8.3g\n", 0*dt, x[0], v[0]);
    x[1] = x[0] + v[0]*dt + (-x[0])*dt*dt/2;
//手順 (ii)
  for (int i = 1; i < N; i++) {
    x[i+1] = 2*x[i] - x[i-1] + (-x[i])*dt*dt;
    v[i]   = (x[i+1] - x[i-1])/(2*dt);
    printf("%4.1f %8.3g %8.3g\n", i*dt, x[i], v[i]);
  }
//手順 (iii)
    v[N] = (x[N] - x[N-1])/dt + (-x[N])*dt/2;
    printf("%4.1f %8.3g %8.3g\n", N*dt, x[N], v[N]);
  return 0;
}
```