令和7年度(10月期)及び令和8年度　金沢大学大学院自然科学研究科 **博士前期課程入学試験**	
専　攻　名	数物科学専攻（物理学コース）
試験科目名	専門科目
	①　力学 ②　電磁気学 ③　熱統計力学 ④　量子力学 以上４科目のうち全科目を選択してください。
問題用紙等枚数	問題用紙　　計　5　枚 答案用紙　　計　4　枚 下書き用紙　計　4　枚
試　験　日　程	令和７年８月１９日（火）実施

〔全般的な解答に際しての注意事項〕

- 試験開始直後に，問題用紙等が上記指定の枚数のとおりあるか確認してください。
- すべての答案用紙に「志願専攻」及び「受験番号」を記入してください。なお，自分の氏名はどこにも書いてはいけません（書いた場合は，不正行為とみなします）。
- 問題用紙・下書き用紙は，各自持ち帰っても差し支えありません。

〔専攻別注意事項〕

- 問題１から問題４について，それぞれ別々の答案用紙に解答してください。
- スペースが足りない場合は，答案用紙の裏面を使用しても良い。ただしその場合は，答案用紙の表面の右下に「裏に続く」と明記し，裏面においては上部（表面の横線の上に該当する部分）は使用しないこと。

（次のページから問題が始まります。）

I

図 1a に示すように，質量 M，半径 r の厚さが無視できる円輪が傾くことなく，粗い水平面上を滑らずに転がっている。ここで，円輪の質量は円周部に均一に分布している。円輪の回転の角速度を ω として，次の問いに答えなさい。

問 1　円輪の重心の速さを r, ω を用いて表しなさい。

問 2　円輪の重心の並進運動に関するエネルギーを r, M, ω を用いて表しなさい。

問 3　回転する円輪の中心の周りの慣性モーメントが r^2M であることを示しなさい。

問 4　円輪の回転運動に関するエネルギーを r, M, ω を用いて表しなさい。

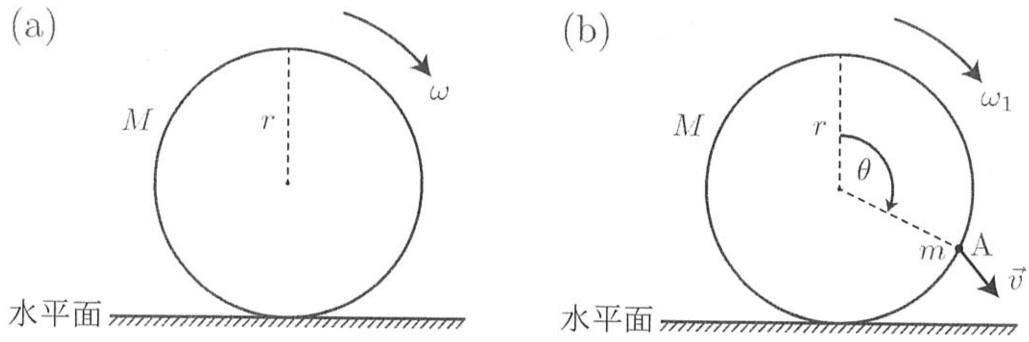

図 1

次に図 1b に示すように，これまでと同じ円輪上の一点 A に質量 m の質点を取り付けた。点 A が円輪の頂点から初速度なしに転がりだすことで，円輪は傾くことなく粗い水平面上を滑らずに転がった。点 A が鉛直上方と θ の角度をなす位置にあるとき，円輪の回転の角速度は ω_1 となった。質点の位置エネルギーの基準は水平面とし，重力加速度を g として次の問いに答えなさい。

問 5　質点の水平面からの高さを r, θ を用いて表しなさい。

問 6　質点が円輪の頂点にあったときの位置エネルギーを r, m, g を用いて表しなさい。

問 7　質点の速度 $\vec{v}$ は，円輪の並進運動の速度と円輪の回転の速度の合成となる。質点の速さ v を r, ω_1, θ を用いて表しなさい。

問 8　質点が円輪の頂点にあるときと，点 A にあるときに関するエネルギー保存の関係式を r, M, m, v, ω_1, g を用いて書きなさい。

問 9　角速度 ω_1 を r, M, m, θ, g を用いて表しなさい。

II

電場に関するガウスの法則は，電場 $\boldsymbol{E}$ と電荷密度 ρ_e の関係を記述するマクスウェル方程式の一つであり，微分形は以下のように表される。ここで，ε_0 は真空の誘電率である。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

問 1　電場に関するガウスの法則を積分形で表しなさい。ただし，ある閉曲面を S，その面上の微小面積要素を dS，その点における電場の外向きの法線成分を E_n，閉曲面が囲む領域を V，そのなかの微小体積要素を dV とする。

図 2a に示すように，一様な電荷密度$\pm\,\rho$で帯電している半径 a の正負の帯電球を，微小な間隔 δ $(\delta \ll a)$ で真空中に配置した。負の帯電球の中心を $(0,0,0)$，正の帯電球の中心を $(\delta,0,0)$ とする。

問 2　負の帯電球が球内の点 (x,y,z) につくる電場ベクトルを，直交座標成分 (E_x,E_y,E_z) の形式で答えなさい。

問 3　正の帯電球が球内の点 (x,y,z) につくる電場ベクトルを，直交座標成分 (E_x,E_y,E_z) の形式で答えなさい。

問 4　正負の帯電球が球内の点 (x,y,z) につくる電場ベクトルを，直交座標成分 (E_x,E_y,E_z) の形式で答えなさい。

問 5　正負の帯電球が球外の点 (x,y,z) につくるポテンシャルを答えなさい。球外の点を考える場合，原点に負の点電荷，座標 $(\delta,0,0)$ に正の点電荷が存在していると扱ってよい。ポテンシャルの基準は無限遠とする。

問 6　問 5 において，球外の点が十分遠方にあり $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \gg \delta$ が満たされるときのポテンシャルを答えなさい。

ヒント：関数 $f(s)$ において，$|\Delta s| \ll |s|$ なる Δs に対して，$f(s+\Delta s)-f(s) \simeq f'(s)\Delta s$ と近似できることを用いてもよい。あるいは，$f(s)=(1+s)^n$ は，$|s| \ll 1$ なる s に対して，$f(s) \simeq 1+ns$ と近似できることを用いてもよい。

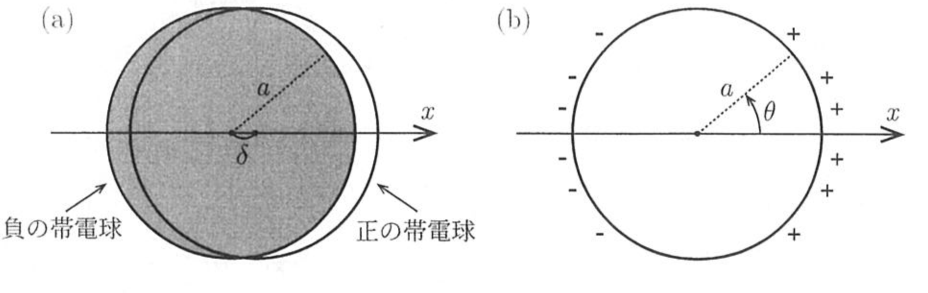

図 2

図 2a で考えた微小な間隔 δ で配置された一様な電荷密度$\pm\,\rho$の正負の帯電球において，δ を無限小まで小さくすると，図 2b に示した，真空中において中心が原点に配置された半径 a の球の表面に面電荷密度 $\rho\delta\cos\theta$ で電荷が分布している場合と同じ状況になり，電場も同一になる。ここで θ は，x 軸から測った角度である。この事実は，問 8 を解く際の手がかりとなる。

x 軸方向を向く一様な外部電場 $(E_0, 0, 0)$ が存在する真空中に，半径 a の導体球が配置されている。導体球の中心は原点，全電荷はゼロとする。球面上の点の x 軸から測った角度を θ とする。

問 7　導体球内部の電場を答えなさい。

問 8　球面上の点の面電荷密度を θ, E_0, ε_0 を用いて答えなさい。図 2 の下に記載されたヒントを参考にしなさい。

問 9　球面上の点 (x, y, z) における電場ベクトルを x, y, z, θ, E_0, a, ε_0 のうちから必要なものを用い，直交座標成分 (E_x, E_y, E_z) の形式で答えなさい。

III

エネルギー準位が $E_1 = -\varepsilon$, $E_2 = +\varepsilon$（ただし $\varepsilon > 0$）の２つのみからなる N 個の独立な粒子系のカノニカル分布を考える。この系は逆温度 $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ の大きな熱浴と接しており，各粒子は熱浴とのみ相互作用し，粒子間での相互作用はないものとする。ただし，k_B はボルツマン定数，T は絶対温度である。熱浴のエネルギー E_R は粒子系全体のエネルギーよりじゅうぶん大きく，各粒子は温度 T の熱平衡状態にあるとする。以下の問いに答えなさい。

まずは，１粒子の場合を考える。ある粒子がエネルギー準位 E_i $(i = 1, 2)$ をとる確率を P_i として，以下の問いに答えなさい。

問１ 熱浴と１粒子からなる孤立系において，P_i は E_R の関数となり，熱浴の微視的状態数 $\Omega(E_R)$ に比例する。このときの熱浴のエントロピー $S(E_R)$ を以下の選択肢から正しいものを選びなさい。

(a) $\dfrac{1}{k_B}\ln\Omega(E_R)$　(b) $k_B^2\ln\Omega(E_R)$　(c) $k_B\ln\Omega(E_R)$

問２ E_R は，孤立系のエネルギーである E_t を用いて，$E_R = E_t - E_i$ と表される。ここで，熱力学の関係式 $\dfrac{\partial S(E)}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$ を用い，また，$E_i \ll E_t$ であることから，近似式 $S(E_t - E_i) \simeq S(E_t) - \dfrac{E_i}{T}$ が成り立つ。このとき，問１の答えと $P_i \propto \Omega(E_R)$ であることを用いて $P_i \propto e^{-\beta E_i}$ となることを示しなさい。

問３ P_i は，分配関数とよばれる規格化因子 $Z = \displaystyle\sum_i e^{-\beta E_i}$ を用いて，$P_i = \dfrac{e^{-\beta E_i}}{Z}$ と表される。１粒子あたりの分配関数 Z を $\beta, k_B, T, \varepsilon$ のうち，必要なものを用いて示しなさい。

問４ このカノニカル分布における１粒子の平均エネルギー $\langle E\rangle$ が，$\langle E\rangle = -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ となることを，期待値の定義 $\langle E\rangle = \displaystyle\sum_i E_i P_i$ を用いて示しなさい。

次に，N 個の粒子の場合を考える。N 個の粒子が存在する部分系の体積を V とし N, V は一定とする。

問５ N 個の粒子系全体の分配関数 Z_N を Z および N を用いて示しなさい。

問６ N 個の粒子系全体の平均エネルギー $\langle E'\rangle$ を $N, \beta, k_B, T, \varepsilon$ のうち，必要なものを用いて示しなさい。

問７ 問６の結果を β で微分し，$\dfrac{\partial\langle E'\rangle}{\partial\beta}$ を求めなさい。答えは $N, \beta, k_B, T, \varepsilon$ のうち，必要なものを用いて示しなさい。必要であれば以下の関係式を用いてもよい。

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},\ \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

問８ 定積熱容量 $C_V = \left(\dfrac{\partial\langle E'\rangle}{\partial T}\right)_{N,V}$ を N, k_B, T, ε を用いて示しなさい。

問９ $T \to 0$ および $T \to \infty$ における C_V の極限値を，それぞれ計算の根拠とともに示しなさい。また，$T = \dfrac{\varepsilon}{k_B}$ のときの C_V について，以下の選択肢から正しいものを選びなさい。

(a) $C_V > 0$,　(b) $C_V < 0$,　(c) $C_V = 0$

IV

スピン $\frac{1}{2}$ の系を考え，スピン演算子 $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ を以下のように行列を用いて定義する。

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで，$\hbar$ はプランク定数を 2π でわった量である。以下の問いに答えなさい。

問１ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ で与えられるベクトル u が $\hat{S}_y$ の固有ベクトルであることを示し，その固有値を求めなさい。

問２ $\hat{S}_x^2$ を $\hbar, \hat{I}$ を用いて表しなさい。ただし $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列である。

以下では，この系における状態ベクトルが

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

という形で与えられる場合を考える。ただし α, β は複素数の定数である。以下の問いに答えなさい。

問３ χ が規格化されている，すなわち $\chi^\dagger\chi = 1$ が成り立つとする。このとき α, β が満たすべき条件を求めなさい。ただし $\dagger$ はエルミート共役を意味し，$\chi^\dagger = (\alpha^* \, \beta^*)$ である。

問４ 状態ベクトル χ で与えられるスピンの z 成分を測定したとき，正の値 $\frac{\hbar}{2}$ が得られる確率を α, β のうちから必要なものを用いて表しなさい。

問５ χ が $\hat{S}_x$ の固有値 $\frac{\hbar}{2}$ に属する規格化された固有ベクトルを表すとき，α, β の値を求めなさい。

次に，この系における状態ベクトルが

$$\chi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

という形で与えられる場合を考える。ただし θ は実数の定数である。以下の問いに答えなさい。

問６ スピンの x 成分の期待値 $\langle S_x \rangle = \chi(\theta)^\dagger \hat{S}_x \chi(\theta)$ を求めなさい。

問７ ３次元単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ とスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{S}}$ との内積で与えられる演算子 $\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ を考える。$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ を２行２列の行列の形で表しなさい。

問８ $\chi(\theta)$ が $\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ の固有ベクトルであることを示し，その固有値を求めなさい。必要ならば，任意の実数 a, b に対して以下の公式が成り立つことを用いてもよい。

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a-b), \quad \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$$

問９ 状態ベクトル $\chi(\theta)$ で与えられるスピンの x 成分を測定したとき，正の値 $\frac{\hbar}{2}$ が得られる確率を求めなさい。さらに，得られた確率を最大にする θ の値を求めなさい。