I

問１ 円輪の重心の速さを V とおくと，$V = r\omega$

問２ 円輪の並進運動のエネルギーは $\frac{1}{2}MV^2$ であるので，問１の V を代入すると，$\frac{1}{2}M(r\omega)^2$

問３ 求める慣性モーメントを I とする。輪の円周部の微小部分の質量を dm とすると，$I = \int r^2 dm = r^2 M$

問４ 円輪の回転運動のエネルギーは $\frac{1}{2}I\omega^2$ であるので，問３の I を代入すると，$\frac{1}{2}M(r\omega)^2$

問５ 求める高さを h とする。図より，$h = r - r\cos(\pi - \theta) = r + r\cos\theta = r(1 + \cos\theta)$

問６ 頂点の高さは $2r$ より，求める位置エネルギーは $2mgr$

問７ 質点の円輪の並進運動に伴う速度の成分を v_1 とする。質点の円輪の回転運動に伴う速度の成分は $r\omega_1$ であり，この２つの速度成分のなす角は θ であるので (求める速さ v に対峙する角度は $(\pi - \theta)$)，余弦定理より，
$v^2 = (v_1)^2 + (r\omega_1)^2 - 2v_1 r\omega_1 \cos(\pi - \theta)$
また，$v_1 = r\omega_1$ である。
v について整理すると，$v = r\omega_1\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$　$\cdots$(1) 式

問８ 質点が円輪の頂点にあったときの位置エネルギーが，質点の運動エネルギー，質点の位置エネルギー，円輪の並進の運動エネルギー，円輪の回転エネルギーに変換される。前問のように，円輪の並進運動の速さを v_1 とすると，エネルギー保存の関係式は，$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 2mgr$ となる。
ここで，$v_1 = r\omega_1$, $I = r^2M$, $h = r(1 + \cos\theta)$ より，上式は，
$\frac{1}{2}M(r\omega_1)^2 + \frac{1}{2}M(r\omega_1)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgr(1 + \cos\theta) = 2mgr$　$\cdots$(2) 式

問９ (1) 式と (2) 式を用いて，ω_1 について整理していくと，
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mg(1 - \cos\theta)}{r\{M + m(1 + \cos\theta)\}}}$$

II

問 1

$$\int_S E_n\, dS \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_e\, dV$$

問 2

負の帯電球がつくる電場ベクトル $\boldsymbol{E}_- \;=\; -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\,(x, y, z)$

問 3

正の帯電球がつくる電場ベクトル $\boldsymbol{E}_+ \;=\; \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\,(x-\delta,\, y,\, z)$

問 4

$$\boldsymbol{E} \;=\; \boldsymbol{E}_- + \boldsymbol{E}_+ = \left(-\frac{\rho\delta}{3\varepsilon_0},\, 0,\, 0\right)$$

問 5

$$V \;=\; \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\delta)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

問 6

$$V \;\sim\; \frac{a^3}{3\varepsilon_0}\,\rho\,\delta\cdot\frac{x}{r^3}$$

問 7

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

問 8

$$3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

問 9

$$\frac{3E_0\cos\theta}{a}\,(x, y, z) = \frac{3E_0}{a}\,x\cdot\frac{(x, y, z)}{a}$$

III

問1 (c) $k_B \ln \Omega(E_R)$

問2 $E_R = E_t - E_i$ を用いて，問1より，$S(E_t - E_i) = k_B \ln \Omega(E_t - E_i)$ なので，
$\Omega(E_t - E_i) = \exp\left(\frac{S(E_t - E_i)}{k_B}\right)$
問題文より，$P_i \propto \Omega(E_t - E_i) = \exp\left(\frac{S(E_t - E_i)}{k_B}\right)$
$S(E_t - E_i) \approx S(E_t) - \frac{E_i}{T}$ を用いて，$P_i \propto \exp\left(\frac{1}{k_B}\left[S(E_t) - \frac{E_i}{T}\right]\right)$
したがって，　$P_i \propto e^{-\beta E_i}$ $(\beta = \frac{1}{k_B T})$

問3 エネルギー準位が $E_1 = -\varepsilon, E_2 = +\varepsilon$ の2準位系なので，分配関数 Z は，
$Z = \sum_{i=1} e^{-\beta E_i} = e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}$ もしくは，$Z = e^{\varepsilon/k_B T} + e^{-\varepsilon/k_B T}$
（別解答：$Z = 2\cosh(\beta\varepsilon)$ もしくは，$Z = 2\cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$）

問4 期待値の定義より，$\langle E\rangle = \sum_i E_i P_i = \frac{1}{Z}\sum_i E_i e^{-\beta E_i}$
$E_1 = -\varepsilon, E_2 = +\varepsilon$ を代入して
$\langle E\rangle = \frac{\varepsilon(e^{-\beta\varepsilon} - e^{\beta\varepsilon})}{Z} = -\varepsilon \cdot \frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{Z}$
問3より，$Z = e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}$ なので，
$\langle E\rangle = -\varepsilon \cdot \frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}}$

一方，分配関数の定義より，$\ln Z = \ln\left(e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}\right) \Rightarrow \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \varepsilon \cdot \frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}}$
したがって，$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

問5 $Z_N = Z^N$

問6 N 個の粒子系全体の平均エネルギーは，$\langle E'\rangle = N\langle E\rangle$
問4で示した1粒子の平均エネルギー $\langle E\rangle$ を用いて，全体の平均エネルギーは，
$\langle E'\rangle = -N\varepsilon \cdot \frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}}$ もしくは，$\langle E'\rangle = -N\varepsilon \cdot \frac{e^{\varepsilon/k_B T} - e^{-\varepsilon/k_B T}}{e^{\varepsilon/k_B T} + e^{-\varepsilon/k_B T}}$

問7 問6の答えを与えられた関係式を用いて書き換えると，
$\langle E'\rangle = -N\varepsilon \cdot \frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}} = -N\varepsilon \tanh(\beta\varepsilon)$
この式を β で微分すると，
$\frac{\partial\langle E'\rangle}{\partial\beta} = -N\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial\beta}(\tanh(\beta\varepsilon)) = -\frac{N\varepsilon^2}{\cosh^2(\beta\varepsilon)}$ もしくは，$-\frac{N\varepsilon^2}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$
（別解答1：$-N\varepsilon^2 \cdot \mathrm{sech}^2(\beta\varepsilon)$ もしくは，$-N\varepsilon^2 \cdot \mathrm{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$）
（別解答2：$-\frac{4N\varepsilon^2}{(e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon})^2}$ もしくは，$-\frac{4N\varepsilon^2}{\left(e^{\varepsilon/k_B T} + e^{-\varepsilon/k_B T}\right)^2}$）

問8 $C_V = \frac{d\langle E'\rangle}{dT} = \frac{d\langle E'\rangle}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dT}$

問7の答え，および $\beta = \frac{1}{k_B T}$ を用いて，$\frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$ （別解答：$C_V = \frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2} \cdot \mathrm{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$）

問9　問8の答えより，$T \to 0$ のとき，$\frac{1}{T^2} \to \infty$ である一方，$\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \to 0$ の方が急速に減衰するので，$C_V \to 0$ となる。一方，$T \to \infty$ のとき，$\frac{1}{T^2} \to 0$ となり，$\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \to 1$ のため，$C_V \to 0$ となる。また，$\frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$ に $T = \frac{\varepsilon}{k_B}$ を代入すると，(a) $C_V > 0$

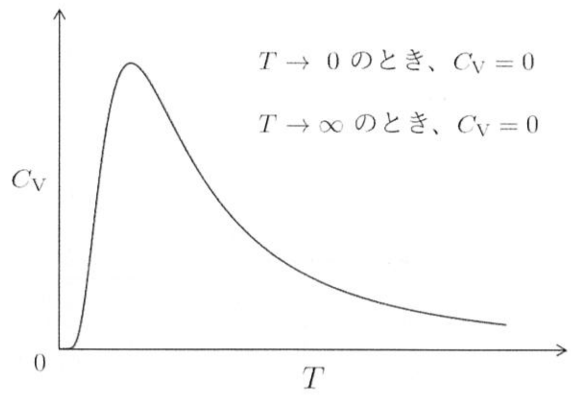

図 1

IV

問 1

$$\hat{S}_y u = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}u$$

よって u は $\hat{S}_y$ の固有ベクトルであり，固有値は $\dfrac{\hbar}{2}$ である。

問 2

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\hat{I}$$

問 3

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

問 4

$$|\alpha|^2$$

問 5　$\hat{S}_x\chi = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ が $\dfrac{\hbar}{2}\chi = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ に等しくなることから $\alpha = \beta$ が得られる。これと規格化の条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を考慮すると，以下を得る。

$\alpha = \beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$　ただしϕは実数　（複素位相 $e^{i\phi}$ がないものも正解とする。）

問 6

$$\langle S_x \rangle = \chi(\theta)^\dagger \hat{S}_x \chi(\theta) = \frac{\hbar}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \hbar\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\hbar}{2}\sin\theta$$

問 7

$$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} = \sin\theta\hat{S}_x + \cos\theta\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

問 8

$$(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}})\chi(\theta) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\chi(\theta)$$

よって $\chi(\theta)$ は $\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ の固有ベクトルであり，固有値は $\dfrac{\hbar}{2}$ である。

問 9　$\hat{S}_x$ の固有値 $\dfrac{\hbar}{2}$ に属する規格化された固有ベクトルを v_+ とおくと，求める確率は $|v_+^\dagger\chi(\theta)|^2$ で与えられる。問 5 より $v_+ = e^{i\phi}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるから，求める確率は

$$|v_+^\dagger\chi(\theta)|^2 = \frac{1}{2}\left|(1\,1)\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+\sin\theta)$$

となる。これを最大にする θ の値は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ である。