２０２５年度（１０月期）及び ２０２６年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程入学試験

数物科学専攻・数学コース

専門科目

（注　意）

1　問題冊子は指示があるまで開かないこと。

2　問題冊子は本文３ページ，答案用紙は４枚，下書き用紙は３枚である。

3　問題は全部で６問ある。その中から４問を選択して，１問につき１枚の答案用紙に解答せよ。その際，答案用紙の解答欄（横線の下）左上の［　］欄に解答する問題番号を記入すること。

4　解答はすべて答案用紙の解答欄に記入すること。答案用紙の裏を使ってもよいが，この場合は解答欄に裏を使うことを明記し，裏面においては上部（おもて面の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。

5　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること。

6　問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。

試験問題の本文は次のページから始まる。

令和７年度（１０月期入学）及び令和８年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **問題用紙**		
専攻名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 数学	P.（1 ／ 3）

次の問題 [**1**] ～ [**6**] の中から 4 問を選択して解答せよ。

[**1**] 行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。

(1)　A のすべての固有値を求めよ。

(2)　A の各固有値 λ に対する固有空間 $W_\lambda=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3 \mid A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$ と広義固有空間

$$\widetilde{W}_\lambda=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3 \mid \text{ある } m\geq 1 \text{ に対して } (A-\lambda E)^m\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

を求めよ。ただし，E は 3 次の単位行列である。

(3)　$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような 3 次の正則行列 P を一つ求めよ。

[**2**] V を 3 次の実正方行列のなすベクトル空間とし，W を V の部分集合で

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & a_5 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\boldsymbol{R}\right\}$$

とする。写像 $f\colon W\to V$ を

$$f(X)=X-{}^tX \quad (X\in W)$$

により定める。ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す。次の問いに答えよ。

(1)　W が V の部分空間であることを示せ。

(2)　f が線形写像であることを示せ。

(3)　f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ。

(4)　f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ。

---

[3] a を 1 より大きい実数とし，x を実変数とする。次の問いに答えよ。

(1) 任意の正の整数 m に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{a^x}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) n を正の整数とし，$f_0(x),\cdots,f_n(x)$ を x の実係数多項式とする。$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)a^{kx}$ が恒等的に 0 のとき，$f_0(x),\cdots,f_n(x)$ も恒等的に 0 となることを示せ。

[4] 実数 a に対して，$D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1\}$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^a}$$

で定める。このとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が収束するための a の必要十分条件を求め，そのときの広義積分の値を求めよ。

[5] 複素関数

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

を考え，$M>1$ とする。複素平面において

$$C_1(M)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -M\leq x\leq M\},\quad C_2(M)=\{Me^{i\theta}\mid 0\leq\theta\leq\pi\}$$

とし，$C_1(M)$，$C_2(M)$ をつないでできる単純閉曲線 $C(M)$ に反時計回りに向きを入れる。次の問いに答えよ。

(1) 線積分 $\displaystyle\int_{C(M)} f(z)dz$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_{C_2(M)} f(z)dz=0$ を示せ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ の値を求めよ。

---

[6] 集合 X を次を満たす数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 全体の集合とする。

- すべての k に対して $a_k = 0$ もしくは $a_k = 1$ である。
- $a_k = 0$ となる k は無限個ある。
- $a_k = 1$ となる k は無限個ある。

そして，$\alpha = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \beta = \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$ に対して，

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k}$$

とする。さらに X 上の関数 f を $\alpha = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$ に対して，

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$$

と定義する。次の問いに答えよ。

(1) X の元 $\alpha = \left\{ \dfrac{(-1)^k + 1}{2} \right\}_{k=1}^{\infty}, \beta = \left\{ \dfrac{(-1)^{k+1} + 1}{2} \right\}_{k=1}^{\infty}$ に対して，$f(\alpha)$ 及び $d(\alpha, \beta)$ の値を求めよ。

(2) d は X 上の距離関数であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする。関数 $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ は距離空間 (X, d) 上の連続関数であることを示せ。さらに，f の像は開区間 $(0, 1)$ に含まれる，つまり $f(X) \subset (0, 1)$ であることを示せ。