令和７年度（１０月期入学）及び令和８年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解答例**	
専攻名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　（1 ／ 3）

採点においては解答のプロセスや記述の論理性も重視した。以下では，そのプロセスがわかる程度の略解を一つ示したが，異なる方針の解答もあり得る。また，具体的に解を求める問題では，解の表し方が以下とは異なる解答もあり得る。

[1] (1) 1

(2) $W_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \boldsymbol{R} \right\}$, $\widetilde{W}_1 = \boldsymbol{R}^3$

(3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

[2] (1) 部分空間の定義に基づいて示す。

(2) 線形写像の定義に基づいて示す。

(3) $\dim \operatorname{Ker} f = 3$ であり，基底の例として

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

が取れる。

(4) $\dim \operatorname{Im} f = 2$ であり，基底の例として

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

が取れる。

解 答 例

専 攻 名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　　（２／３）

---

[3] (1)　ロピタルの定理を用いて示す。

(2)　$\sum_{k=0}^{n} f_k(x)a^{kx} \equiv 0$ の両辺を a^{nx} で割って $x \to \infty$ を取ると $f_n(x) \equiv 0$ が分かる。これを繰り返すと $f_0(x) \equiv \cdots \equiv f_n(x) \equiv 0$ が分かる。

[4] $D_n = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\right\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ とおくと，$\{D_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は D の近似増大列である。極座標変換により，

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \int_1^n \left(\int_0^{2\pi} r^{1-2a} d\theta\right) dr$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-a}\left(n^{2-2a} - 1\right) & (a \neq 1) \\ 2\pi \log n & (a = 1) \end{cases}$$

を得る。よって，広義積分が収束するための必要十分条件は $a > 1$ であり，そのときの広義積分の値は $\dfrac{\pi}{a-1}$ となる。

---

[5] (1) 留数定理より

$$\int_{C(M)} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), i) = \pi$$

となる。

(2) 線積分の定義を用いて,

$$\left|\int_{C_2(M)} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{1}{1+M^2e^{2i\theta}}\right| M d\theta \le \frac{\pi M}{M^2-1} \to 0 \quad (M \to \infty)$$

と示される。

(3) (1), (2) の結果より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

が示される。

[6] (1) 定義より, $f(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}$, $d(\alpha, \beta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ となる。

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in X$ を取り,

$$d(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta, \quad d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha), \quad d(\alpha,\gamma) \le d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma)$$

となることを示す。

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $d(\alpha, \beta) < \epsilon$ となる $\alpha, \beta \in X$ を取ると,

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \le d(\alpha, \beta) < \epsilon$$

が示されるので f は連続である。

$\alpha = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$ とする。定義から, ある k に対して $a_k = 1$ であるので

$$f(\alpha) \ge \frac{1}{2^k} > 0$$

となる。また, ある k に対して $a_k = 0$ であるので

$$f(\alpha) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k} < 1$$

となる。ゆえに像は開区間 $(0, 1)$ に含まれる。