

問題用紙

専攻名	機械科学専攻, フロンティア工学専攻, 電子情報通信学専攻, 地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース	
試験科目名	数学	P. (1/1)

- [注意] 1. 問題 I, II, III, IV のうち, 2題を選択して解答すること。
 2. 解答は選択問題ごとに分けて, 1題を1枚の答案用紙の表だけに書くこと。
 3. 選択問題の番号を, 各答案用紙左上の 内に記入すること。

I 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \sin x \sin^2 y - \frac{dy}{dx} \cos^2 x \cos y = 0 \quad (2) \frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(3) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \quad (4) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 2 \cos 2x$$

II 閉領域 $V: x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, 0 \leq z \leq 1$ とその境界となる閉曲面 S を考える。スカラー場 $\varphi(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ とベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (3xz^2, 3yz^2, z^3)$ に対して, 次の問いに答えよ。

問1 $\nabla\varphi, \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \cdot \mathbf{A}$ を求めよ。

問2 閉曲面 S 上の曲線 $C: \mathbf{r}(t) = ((1-t) \cos \frac{\pi t}{2}, (1-t) \sin \frac{\pi t}{2}, t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ に対し, 接ベクトル $\frac{d\mathbf{r}}{dt}, (0 < t < \frac{1}{2})$ と線積分 $\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ。

問3 面積分 $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ。但し, \mathbf{n} は閉曲面 S の外向きの単位法線ベクトルとする。

III 複素変数 z の多項式 $P(z) = z^2 + 4, Q(z) = z^3 - 8$ とそれらの導関数 $P'(z), Q'(z)$ および正方向の向きを持つ閉曲線 $C = \{z; |z| = 3\}$ を考える。また, 虚数単位を i とする。次の問いに答えよ。

問1 極限值 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P'(z)}{P(z)}, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Q'(z)}{Q(z)}, \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{P'(z)}{P(z)}, \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{Q'(z)}{Q(z)}$ をそれぞれ求めよ。

問2 閉曲線 C に沿う複素積分 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P'(z)}{P(z)} dz, \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz, \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{P'(z)}{P(z)} dz, \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz$ をそれぞれ求めよ。

問3 有理関数 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ とその導関数 $f'(z)$ を考える。2つの等式 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$ および $\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ を示せ。

IV $f(x)$ は $f(x) = \sin^3(\pi x)$ で定義される周期2を持つ周期関数であるとする。次の問いに答えよ。解答にあたり, 恒等式

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \quad \cos 3\theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta$$

を用いてよい。

問1 関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

問2 関数 $|f(x)|$ のフーリエ級数を求めよ。