令和７年度（１０月期入学）及び令和８年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解答例**		
専攻名	機械科学専攻，フロンティア工学専攻，電子情報通信学専攻，地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース	
試験科目名	数学 (公開用)	P.（１／１）

I　以下 C, C_1, C_2 は任意定数である。

(1) 変数分離形の問題である。$y = n\pi$ (n は整数) は特異解である。以下 $y \neq n\pi,\quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ とすると $\dfrac{\cos y}{\sin^2 y}dy = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ より一般解は $\underline{\cos x + \sin y = C\cos x \sin y}$.

(2) 線形微分方程式である。$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ に気を付けると解の公式より
$y = e^{\log(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\log(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}dx + C\right)$ の積分を実行することで
一般解は，$\underline{\sqrt{1+x^2}\left(\log(1+x^2)+C\right)}$.

(3) 2 階斉次線形微分方程式である。特性方程式は，$s^2 + 2s + 5 = 0$ の解 $s = -1 \pm 2i$ より一般解は，$\underline{y = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)}$.

(4) 特殊解を $y = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ とおいて，微分方程式に代入すると，$a = \dfrac{8}{17}$, $b = \dfrac{2}{17}$ を得る。よって，一般解は，$\underline{y = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + \dfrac{8}{17}\sin 2x + \dfrac{2}{17}\cos 2x}$.

II　問 1　$\underline{\nabla\varphi = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}((y^2+z^2)yz, (z^2+x^2)zx, (x^2+y^2)xy)}$, $\nabla\times\boldsymbol{A} = \underline{(-6yz, 6xz, 0)}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \underline{9z^2}$.

問 2　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \underline{\left(-\dfrac{\pi}{2}(1-t)\sin\dfrac{\pi t}{2} - \cos\dfrac{\pi t}{2}, \dfrac{\pi}{2}(1-t)\cos\dfrac{\pi t}{2} - \sin\dfrac{\pi t}{2}, 1\right)}$.

$$\int_C \nabla\varphi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{1/2}\nabla\varphi(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}dt = \int_0^{1/2}\frac{d}{dt}\varphi(\boldsymbol{r}(t))\,dt = \varphi(\boldsymbol{r}(\tfrac{1}{2})) - \varphi(\boldsymbol{r}(0)) = \underline{\frac{1}{8\sqrt{2}}}.$$

問 3　Gauss の発散定理により $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \int_0^1 9z^2\pi(1-z)^2\,dz = \underline{\frac{3}{10}\pi}$.

III　問 1　$P(z) = (z-2i)(z+2i)$, $Q(z) = (z-2)(z-2\omega)(z-2\omega^2)$ (ただし $\omega^2+\omega+1=0$) から $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \dfrac{1}{z-2i} + \dfrac{1}{z+2i}$, $\dfrac{Q'(z)}{Q(z)} = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-2\omega} + \dfrac{1}{z-2\omega^2}$ に注意すると，$\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{P'(z)}{P(z)} = \underline{0}$, $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \underline{0}$, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z\frac{P'(z)}{P(z)} = \underline{2}$, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \underline{3}$.

問 2　点 $z = \pm 2i, 2, 2\omega, 2\omega^2$ はいずれも円 C 内にあるため，$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \underline{2}$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Q'(z)}{Q(z)}dz = \underline{3}$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{P'(z)}{P(z)}dz = 2i - 2i = \underline{0}$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{Q'(z)}{Q(z)}dz = 2(1+\omega+\omega^2) = \underline{0}$.

問 3　$\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{Q'(z)}{Q(z)}$ なので $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{f'(z)}{f(z)} = 0$, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z\frac{f'(z)}{f(z)} = -1$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -1$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ より示される。

IV　問 1　$\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$ より $\underline{f(x) = \dfrac{3}{4}\sin(\pi x) - \dfrac{1}{4}\sin(3\pi x)}$.

問 2　$|f(x)|$ は周期 1 を持つ偶関数となる。よって，$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2n\pi x)$ とフーリエ級数展開される。ただし，$a_0 = 4\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$, $a_n = 4\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\cos(2n\pi x)\,dx$ である。恒等式を活用して各 a_n を計算により得ることで，$\underline{f(x) = \dfrac{4}{3\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{\pi}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\cos(2n\pi x)}$.