令和６年度 (10月期入学) 及び 令和７年度
金沢大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験
数物科学専攻計算科学コース

専門科目

注意事項

1. 問題冊子は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文10ページであり，答案用紙は４枚，下書用紙は１枚である。
3. 数学 (I～IV) と基礎物理 (V～VIII) と計算機 (IX，X) の３分野の中から２分野以上の問題４問を選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。
4. １問につき１枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面においては上部 (表の横線の上に相当する部分) は使用しないこと。
5. 問題冊子と下書用紙は持ち帰ること。

（次のページから問題が始まります。）

I

以下の問いに答えよ。

問１　極限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}-\frac{n}{1-e^{-n}}\right)$$

を求めよ。

問２　関数

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=(|x|-2)|x-1|$$

の最小値を求めよ。

問３　関数

$$f(x)=\int_{-x^2}^{1}\frac{\sin t}{t^2+2}\,dt$$

の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

II

以下の問いに答えよ。

問１ 関数

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=2x^2y-2x^4-y^4$$

を考える。

(1) f が $\mathbb{R}^2$ で最大値をとることを示せ。

(2) f の $\mathbb{R}^2$ 上での最大値を求めよ。

問２ $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$$

に対して，重積分

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2+3}\,dydx$$

の値を求めよ。

III

以下の問いに答えよ。

問１　実数 s に対して，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1-s \\ 1 & 1 & 3 & s \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

問２　2×2 実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。任意の 2×2 実行列 X に対して，$\mathrm{tr}\,(AX) = 0$ ならば，$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。ここで tr はトレース $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + w$ を表す。

問３　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

IV

ある実数 t に対して，行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$ は行列式の値が 0 であるとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

問１　実数 t の値を求めよ。

問２　$AX = I$ を満たす 3×3 実行列 X は存在しないことを示せ。ここで I は 3 次単位行列である。

問３　A の固有値をすべて求め，異なる固有値それぞれの固有空間の基底 1 組を求めよ。

問４　行列 A が対角化できる場合は $P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求め，A が対角化できない場合はその理由を述べよ。

V

xy 平面上を動く質点が位置 (x, y) にあるとき，力 $\boldsymbol{F}(x, y) = (ay, bx)$ が質点に働く。a と b は定数とする。以下の問いに答えよ。

問１ 原点 O(0, 0) から点 P(1, 0) まで質点が x 軸上を動いた。このとき力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 W_1 を求めよ。

問２ 点 P(1, 0) から点 Q(1, 1) まで質点が y 軸に平行に動いた。このとき力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 W_2 を求めよ。

問３ 点 Q(1, 1) から点 R(0, 1) まで質点が x 軸に平行に動いた。このとき力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 W_3 を求めよ。

問４ 点 R(0, 1) から原点 O(0, 0) まで質点が y 軸上を動いた。このとき力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 W_4 を求めよ。

問５ 力 $\boldsymbol{F}$ が保存力のとき，仕事 W_1，W_2，W_3，W_4 の間に成り立つ関係式を求めよ。

問６ 力 $\boldsymbol{F}$ が保存力のとき，a と b の関係式を求めよ。

VI

以下の問いに答えよ。

問 1　ある面積 S の厚みの無視できる平板全体に電荷 Q が一様に分布している。平板が持つ単位面積あたりの電荷 (面密度)σ を求めよ。

以下では，真空中の xy 平面に，厚みの無視できる無限に広い平板があり，電荷が面密度 $\sigma(>0)$ で一様に分布している場合を考える。平板に垂直な方向を z 軸とする。真空の誘電率を ε_0 とする。

問 2　電気力線について，概略図を描き，文章で説明せよ。

問 3　ガウスの法則を用いて，点 $(x, y, z)(z=0$ を除く$)$ での電場ベクトルを求めよ。

問 4　等電位面について，概略図を描き，文章で説明せよ。

問 5　電位を z の関数として求め，グラフで図示しなさい。ただし原点での電位を 0 とする。

VII

質量 m の自由粒子があり，その粒子の一次元での運動を考える。位置座標を x で表す。運動量演算子は位置表示で $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ と表せる。ハミルトニアンは $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$ である。$\hbar$ はディラック定数である。$\hat{H}$ の固有関数 ψ は時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{7.1}$$

に従う。E はエネルギーである。

問１ $f_a(x) = A\cos kx$，$f_b(x) = A\sin kx$（A，$k > 0$）とする。$\psi = f_a$，$\psi = f_b$ がともに式 (7.1) の解となるとき，E と波数 k の関係式を求めよ。

問２ $\hat{p}f_a$，$\hat{p}f_b$ を計算して f_a，f_b を用いて表せ。f_a，f_b が運動量演算子 $\hat{p}$ の固有関数でない理由を述べよ。

境界条件として $\psi(x+L) = \psi(x)$ を課す。L は周期長さとする。この境界条件の下では，n を正の整数，γ を正の実数として，$kL = \gamma n$ を満足することが要請される。このときの k を k_n とおく。

問３ 境界条件 $f_a(L) = f_a(0)$，$f_b(L) = f_b(0)$ より，γ を求めよ。

問４ 波数 $k = k_n$ のときのエネルギー E_n を求めよ。

以下，波数 $k = k_n$ のときについて考える。解答には k_n を用いてよい。

問５ 規格化条件 $\displaystyle\int_0^L dx\,|f_a(x)|^2 = \int_0^L dx\,|f_b(x)|^2 = 1$ を満たす A を求めよ。

問６ f_a と f_b が直交すること，$\displaystyle\int_0^L dx f_a^*(x) f_b(x) = 0$ を示せ。

$\hat{H}$ と $\hat{p}$ の同時固有関数を求めるために，運動量演算子 $\hat{p}$ の固有関数を f_a，f_b を用いて表すことを考える。c_a，c_b を複素数として，$\psi = c_a f_a + c_b f_b$ とすれば，固有値方程式 $\hat{p}\psi = \lambda\psi$（$\lambda$ は定数）は行列表示で $\begin{pmatrix} p_{aa} & p_{ab} \\ p_{ba} & p_{bb} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}$ と表せる。ここで，

$$p_{aa} \equiv \int_0^L dx f_a^*(x)\hat{p}f_a(x),\ p_{ab} \equiv \int_0^L dx f_a^*(x)\hat{p}f_b(x),\ p_{ba} \equiv \int_0^L dx f_b^*(x)\hat{p}f_a(x),\ p_{bb} \equiv \int_0^L dx f_b^*(x)\hat{p}f_b(x)$$

である。

問７ p_{aa}，p_{ab}，p_{ba}，p_{bb} を計算せよ。

問８ 行列 $\begin{pmatrix} p_{aa} & p_{ab} \\ p_{ba} & p_{bb} \end{pmatrix}$ の固有値 λ と規格化された固有ベクトル $\begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}$ を求めよ。

問９ 問８で求めた固有ベクトルに対応する固有関数 ψ を求めよ。

VIII

異種原子 A，B で構成される 2 原子分子 N 個からなる理想気体が体積 V の容器に封入されている系を考える。空間にはデカルト座標系が設定されている。このとき，1 分子のハミルトニアン h_0 は

$$h_0 = \frac{1}{2M}\boldsymbol{p}_G \cdot \boldsymbol{p}_G + \frac{1}{2I}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right)$$

である。ここで，M は分子の質量，$\boldsymbol{p}_G$ は分子の重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ に共役な運動量である。分子の重心から分子内の原子 A へのベクトルを考え，このベクトルに垂直で重心を通る軸を主軸とする慣性モーメントを I とした。また，このベクトルの $\boldsymbol{r}_G$ を原点とした極座標表示を (r,θ,ϕ) とし，θ，ϕ 各々に共役な運動量を p_θ，p_ϕ とした。なお，分子内の原子間距離は変化しないとし，r は定数とした。

系の温度を T，ボルツマン定数を k_B とすると，1 分子の分配関数 q_0 は，

$$q_0 = \alpha \int d^3r_G d^3p_G d\theta d\phi dp_\theta dp_\phi \exp(-\frac{h_0}{k_\mathrm{B}T}) = \gamma(k_\mathrm{B}T)^{\frac{5}{2}} \tag{8.1}$$

である。ただし，α は正の定数，γ は T に依らない定数である。以下の問いに答えよ。

問 1 系の分配関数 Q を q_0 と N を用いて書け。

問 2 系の内部エネルギーの平均値 U を求めよ。ただし，$U = k_\mathrm{B}T^2\dfrac{1}{Q}\dfrac{dQ}{dT}$ を用いてもよい。

問 3 系の定積熱容量を求めよ。

問 4 定数 γ を α, V, I, M を用いて表せ。なお，式 (8.1) の積分は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha \int_V d^3r_G \int d^3p_G \exp(-\frac{\boldsymbol{p}_G \cdot \boldsymbol{p}_G}{2Mk_\mathrm{B}T}) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dp_\theta \exp(-\frac{p_\theta^2}{2Ik_\mathrm{B}T}) \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \exp(-\frac{p_\phi^2}{2Ik_\mathrm{B}T\sin^2\theta}) \\ &= 2\alpha V(2Mk_\mathrm{B}T)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\theta \exp(-\frac{p_\theta^2}{2Ik_\mathrm{B}T}) \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \exp(-\frac{p_\phi^2}{2Ik_\mathrm{B}T\sin^2\theta}) \end{aligned}$$

必要であれば，以下の積分公式を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{ただし } a > 0$$

IX

昨年，ある大学で，25 人の学生が入学試験を受けた。その後，その受験生らにオンラインアンケートへの回答を求めた。しかし，アンケートに回答した受験生の数に関するデータが欠落している。わかっている情報は，アンケートに回答した受験生のうち，94%が微分積分学の問題を正しく解いたと思っており，69%が線形代数学の問題を正しく解いたと思っていたと言うものである。これらの割合は，小数点第一位を四捨五入した数字である。

Python，Fortran または C 言語で，アンケートに回答した受験生の数を計算するプログラムを書け。

X

1 次元調和振動子における時間に依存しないシュレディンガー方程式は，位置変数を x，粒子の質量を m，ディラック定数を $\hbar$，角振動数を ω，波動関数を Ψ，エネルギーを E とし，

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{10.1}$$

と書ける。波動関数が無限遠方でゼロとなる境界条件の下で式 (10.1) を満たす Ψ, E を数値的に求めることを考える。

$y=\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}x$，$\epsilon=\dfrac{2E}{\hbar\omega}$，$\psi(y)=\Psi(x)$，$\phi(y)=\dfrac{d}{dy}\psi(y)$ を用いることで，式 (10.1) は

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dy}\psi(y)=\phi(y)\\ \dfrac{d}{dy}\phi(y)=(y^2-\epsilon)\psi(y)\end{cases} \tag{10.2}$$

となる。式 (10.2) の解が存在するとき $\psi(0)\phi(0)=0$ が成り立つことが知られている。与えられた ϵ に対する $\psi(0)\phi(0)$ の値を以下の手順で求めることを考える。

手順 1 y_N，N をパラメータとし ϵ を入力とする。$y_N^2\gg\epsilon\geqq 1$ を満たすとする。

手順 2 区間 $[0, y_N]$ を N 個に等分割する。分割幅を $\Delta y(=y_N/N)$ とし，$y_i=i\Delta y$ $(i=0,1,\cdots,N)$ とする。また，$\psi_i=\psi(y_i)$，$\phi_i=\phi(y_i)$ とする。

手順 3 漸近解 $\psi(y)\simeq e^{-y^2/2}(y^2\gg\epsilon)$ を用いて，

$$\psi_N=e^{-y_N^2/2}$$
$$\phi_N=-y_Ne^{-y_N^2/2}$$

とする。

手順 4 以下の漸化式 (オイラー法) を $i=N$ から $i=1$ まで逐次的に計算する。

$$\psi_{i-1}=\psi_i-\Delta y\phi_i$$
$$\phi_{i-1}=\phi_i-\Delta y(y_i^2-\epsilon)\psi_i$$

手順 5 $\psi(0)\phi(0)(=\psi_0\phi_0)$ の値を出力する。

上記の手順に従い，ϵ を標準入力から読み込み，$\psi(0)\phi(0)$ の値を標準出力に出力するプログラムのソースコードを Fortran または C 言語で書け。ただし，$y_N=10$，$N=10000$ とし，$y_N^2\gg\epsilon\geqq 1$ は保証されているとする。