

解 答 例

専攻名	数物科学専攻（物理学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 物理学	P. 1 / 6

I

問 1

$$M = \pi \rho L R^2$$

問 2

$$I = \int r^2 dm = \iiint r^2 \cdot \rho r dr d\theta dz = \rho \cdot 2\pi \cdot L \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho L R^4$$

問 3

$$Ma = Mg \sin \beta - F$$

問 4

$$I \frac{d\omega}{dt} = RF$$

問 5

$$R \frac{d\omega}{dt} = a$$

問 6 問 5 の結果を用いて、問 3 と問 4 における $\frac{d\omega}{dt}$ と F を消去する。

$$a = \frac{g \sin \beta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

または、問 1 と問 2 の結果を用いて簡単化すると、

$$a = \frac{2g \sin \beta}{3}$$

いずれの表式でも正解とする。

問 7 摩擦力がはたらかない $F = 0$ の場合に比べて、加速度 a の大きさは $\frac{1}{1 + \frac{I}{MR^2}} \left(= \frac{2}{3} \right)$ 倍だけ小さい。
したがって、(iii)

問 8 問 1 と問 2 の結果を用いると $\frac{I}{MR^2} = \frac{1}{2}$ となり、問 6 で表される a は ρ によらない。
したがって、(ii)

問 9 斜面から円柱への垂直抗力の大きさ N は $N = Mg \cos \beta$ 、摩擦力の大きさ F は問 3 と問 6 の結果を用いて $F = \frac{Mg \sin \beta}{3}$ と表現できる。
円柱が斜面を滑らないための条件 $\mu N \geq F$ において等号を満たすときに β および $\tan \beta$ が最大となることを考慮して、

$$\tan \beta_{\max} = 3\mu$$

または、

$$\beta_{\max} = \tan^{-1}(3\mu)$$

いずれの表式でも正解とする。

解 答 例

専攻名	数物科学専攻 (物理学コース) (一般選抜)	
試験科目名	専門科目 物理学	P. 2 / 6

II

問 1 電流素片から点 O に向かうベクトルを $\mathbf{r}_1$ とする。 $\mathbf{r}_1$ は xy 平面にあり、ベクトル $d\ell$ と直交している。これより、点 O での微小な磁束密度の x, y 成分はそれぞれゼロである。 z 成分 $dB_{z,O}$ は、与えられたビオ・サバルの法則の式において、 $d\ell \times \mathbf{r} \rightarrow |d\ell||\mathbf{r}_1|\sin\frac{\pi}{2} = d\ell R$ と $r \rightarrow r_1 \rightarrow R$ と置き換えて、以下のように計算できる。

$$dB_{z,O} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{R^2} \quad (\text{A.2.0})$$

問 2 式 (A.2.0) をコイルの円周にわたって積分する。磁束密度の x, y 成分はゼロである。 z 成分 $B_{z,O}$ は、

$$B_{z,O} = \int dB_{z,O} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (\text{A.2.1})$$

問 3 電流素片から位置 $(0, 0, z)$ に向かうベクトルは、電流素片から O に向かうベクトル $\mathbf{r}_1$ と O から位置 $(0, 0, z)$ に向かうベクトル $\mathbf{r}_2$ の和に分解できる。 dB_z を求めるに際し、ビオ・サバルの法則の式の分母の部分を $r = |\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1| = \sqrt{|\mathbf{r}_2|^2 + |\mathbf{r}_1|^2} \rightarrow \sqrt{z^2 + R^2}$ と置き換えて計算する。また、 $\mathbf{r}_2$ は xy 平面に垂直な方向を向くベクトルで、 $d\ell \times \mathbf{r}_2$ の z 成分はゼロである。 $d\ell \times \mathbf{r}_1$ は、式 (A.2.0) を求める過程で既に計算しており、 z 成分は $d\ell R$ である。すなわち、 dB_z は、ビオ・サバルの法則の分子の部分を、 $(Id\ell \times \mathbf{r})_z \rightarrow (Id\ell \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2))_z = Id\ell R$ のように置き換えて計算できる。以上から次の表式を導ける。

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.2.2})$$

問 4 式 (A.2.2) を積分する。磁束密度の x, y 成分は、対称性よりゼロになる。磁束密度の z 成分 B_z は

$$B_z = \int dB_z = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.2.3})$$

また、 $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ として代入した結果も正解とする。

問 5 両円電流から点 O に生じる X 軸方向の磁束密度は X 軸方向に同じ向きだから、それぞれの和を計算する。それぞれの円の中心から点 O までの距離は a だから、式 (A.2.3) において、 $z \rightarrow a$ として両円電流の寄与を考え和をとり、

$$B_O = \frac{\mu_0 IR^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.2.4})$$

問 6 それぞれの円の中心から点 P までの距離は、 $(a+x), (a-x)$ であるから、式 (A.2.3) において $z \rightarrow (a+x), (a-x)$ として、それぞれの和をとると、

$$B_P(x) = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left[\frac{1}{(R^2 + (a+x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R^2 + (a-x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (\text{A.2.5})$$

問 7 ヒントに従って、式 (A.2.5) を x の 2 次まで計算することに注意して近似する。例えば、式 (A.2.5) の鍵括

弧 $[\dots]$ の第 1 項目は、 $[R^2 + (a+x)^2]^{-\frac{3}{2}} = [(R^2 + a^2) + (2ax + x^2)]^{-\frac{3}{2}} = (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{2ax + x^2}{R^2 + a^2} \right]^{-\frac{3}{2}}$

解 答 例

専攻名	数物科学専攻（物理学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 物理学	P. 3 / 6

と変形すると, ヒントより, $f(y) = (1+y)^n \simeq 1 + ny + \frac{1}{2}n(n-1)y^2$ for $|y| \ll 1$ が利用できる。
 $n \rightarrow -\frac{3}{2}$, $y \rightarrow \frac{2ax+x^2}{R^2+a^2}$ と置き換えて考えれば, 式 (A.2.5) の鍵括弧 $[\dots]$ 中の第 1 項目は,

$$\left[\frac{1}{(R^2 + (a+x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \simeq (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{2ax+x^2}{R^2+a^2} \right) + \frac{15}{8} \left(\frac{2ax+x^2}{R^2+a^2} \right)^2 \right], \quad (\text{A.2.6})$$

第 2 項目は,

$$\left[\frac{1}{(R^2 + (a-x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \simeq (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2ax-x^2}{R^2+a^2} \right) + \frac{15}{8} \left(\frac{2ax-x^2}{R^2+a^2} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.2.7})$$

それぞれ足すと, $B = 0$ となる。 A は式 (A.2.4) と等しく, $A = B_O = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ となる。

問 8 式 (A.2.6) と式 (A.2.7) の和をとって x の 2 次の係数を計算すると,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\mu_0 I R^2}{2} (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{3(-1)}{2(R^2 + a^2)} + \frac{3(-1)}{2(R^2 + a^2)} + 2 \frac{15(2a)^2}{8(R^2 + a^2)^2} \right] \\ &= \frac{3\mu_0 I R^2}{2} (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \left[-\frac{1}{(R^2 + a^2)} + \frac{5a^2}{(R^2 + a^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

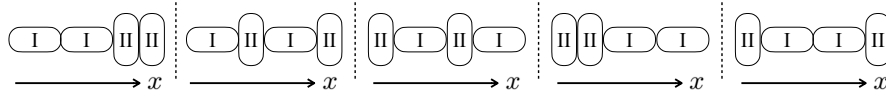
問 9 式 (A.2.8) が, 恒等的にゼロとなればよい。その条件は $R = 2a$ である。

解 答 例

専攻名	数物科学専攻（物理学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 物理学	P. 4 / 6

III

問 1 $N = 4, n = 2$ のとき $W_p = 6$. 図示すると以下になる。



問 2 ミクロカノニカル集団では等重率の原理より $p_j = \frac{1}{W}$. 与えられたエントロピーの式に代入して

$$S = -k_B \sum_j p_j \log p_j = -k_B \sum_j \frac{1}{W} \log \frac{1}{W} = -k_B \frac{1}{W} \log \frac{1}{W} \sum_j 1 = k_B \log W.$$

問 3 問 2 で導いた式に問 1 の問題文で与えられている微視的状态の総数を代入して計算する。 $S_p = k_B \log \frac{N!}{n!(N-n)!} = k_B \{\log N! - \log n! - \log (N-n)!\}$
 $\sim k_B \{N \log N - n \log n - (N-n) \log (N-n)\}$. 最後の変形はスターリングの公式を用いた。

問 4 $\frac{dS_p}{dn} = 0$ のとき $\log \frac{N-n}{n} = 0$. よって $n = \frac{N}{2}$ のとき S_p は極大値 $S_p^e = N k_B \log 2$ となる。

問 5 全エネルギー $E = \varepsilon n$.

問 6 ヘルムホルツの自由エネルギー $F = E - T S_p$.

問 7 (解法その 1) エントロピーをエネルギーで微分して温度と関係づける。 $\frac{1}{T} = \frac{dS_p}{dn} \Big|_{n=n_T} \cdot \frac{dn}{dE} \Big|_{n=n_T} = \frac{k_B \log \frac{N-n_T}{n_T}}{\varepsilon}$. ゆえに, $\frac{n_T}{N-n_T} = \exp \left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)$. n_T について解くと, $n_T = \frac{N}{1 + \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)}$.

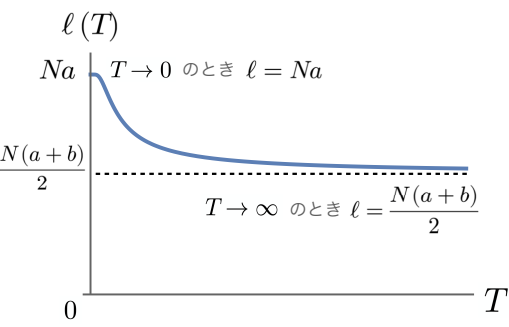
(解法その 2) 熱平衡状態ではヘルムホルツ自由エネルギーが最小となる。問 6 の答え $F = E - T S_p$ に問 5 の答え $E(n)$ と問 3 の答え $S_p(n)$ を代入して $F(n) = \varepsilon n - k_B T [N \log N - n \log n - (N-n) \log (N-n)]$. この最小を与える $n = n_T$ を求める。 $\frac{dF}{dn} \Big|_{n=n_T} = \varepsilon - k_B T \log \frac{N-n_T}{n_T} = 0$. n_T について解くと, $n_T = \frac{N}{1 + \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)}$.

(解法その 3) カノニカル分布を使う。1 分子についての分配関数 $z_1 = 1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)$. 温度 T の熱平衡状態において, ある構成分子ひとつを見たときにそれが II 型である確率 $\frac{n_T}{N} = \frac{1}{z_1} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)$. よって $n_T = \frac{N}{1 + \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)}$.

問 8 $E_T = \varepsilon n_T = \frac{N \varepsilon}{1 + \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)}$. $T \rightarrow +0$ のとき $\lim_{T \rightarrow +0} E_T = \lim_{T \rightarrow +0} \frac{N \varepsilon}{1 + \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)} = 0$.
 $T \rightarrow +\infty$ のとき $\lim_{T \rightarrow +\infty} E_T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N \varepsilon}{1 + \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)} = \frac{N \varepsilon}{2}$.

令和 6 年度 (10 月期入学) 及び令和 7 年度 金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験		
解 答 例		
専攻名	数物科学専攻（物理学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 物理学	P. 5 / 6

問 9 I 型の分子の長さを a , II 型の分子の長さを b ($a > b$) とすると, 高分子化合物の全長 ℓ は $\ell = (N - n_T)a + n_Tb = N \left(\frac{a + b e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}} \right)$. グラフに表すと以下になる。



したがって, 温度が増加すると高分子化合物の長さは短くなる。答えは (iii).

解 答 例

専攻名	数物科学専攻 (物理学コース) (一般選抜)	
試験科目名	専門科目 物理学	P. 6 / 6

IV

問 1

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

問 2

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

問 3 $b = 0$ のとき, 運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ を作用させると $\hat{p}\varphi(x) = \hbar k \varphi(x)$ となるため, 運動量の固有状態である。また, 固有値は $p = \hbar k$ である。

問 4

$$\rho(x) = |a|^2 + |b|^2 + a^* b \exp(-2ikx) + ab^* \exp(2ikx)$$

問 5

$$\rho = |a|^2, \quad j = \frac{\hbar k}{m} |a|^2 = \frac{p}{m} |a|^2 \quad \text{よ} \quad j = \rho v$$

問 6

$$\beta = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

問 7

$$A = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad B = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}$$

問 8

$$R = |A|^2 = \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2}, \quad T = \frac{\beta}{\alpha} |B|^2 = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}$$

問 9

$$E = \frac{9}{8} V_0$$

問 10

$$\rho = \left(\frac{4\alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \right) e^{-2\gamma x}, \quad j = 0$$