| 令和６年度（１０月期入学）及び令和７年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験<br>**解 答 例** | |
|---|---|
| 専 攻 名 | 数物科学専攻（数学コース）（一般選抜） |
| 試験科目名 | 専門科目 数学　　(1／3) |

採点においては解答のプロセスや記述の論理性も重視した。以下では，そのプロセスがわかる程度の略解を一つ示したが，異なる方針の解答もあり得る。また，具体的に解を求める問題では，解の表し方が以下とは異なる解答もあり得る。

[**1**] (1)　$-1$。

(2)　$W_{-1} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \boldsymbol{R} \right\}, \widetilde{W}_{-1} = \boldsymbol{R}^3$。

(3)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$。

[**2**] (1) 線形写像の定義($T_A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 T_A(X_1) + \lambda_2 T_A(X_2), X_1, X_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$)に基づいて示す。

(2) $V$ の基底 $S$ に関する写像 $T_A$ の表現行列は $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ となる。

(3) $A$ の簡約化を $B$ とすると，(2) の表現行列の簡約化は $\begin{pmatrix} B & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & B \end{pmatrix}$ と相似になるので，$T_A$ の階数は $2r$ となる。

---

**[3]** (1) $M = \max_{x\in \boldsymbol{R}} |f'(x)|+1$ とすると，平均値の定理から $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$ が成立するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon/M > 0$ とすると $|x-y| < \delta = \varepsilon/M$ であれば $|f(x)-f(y)| \le M|x-y| < \varepsilon$ となる。

(2) $f(x)-f(y) = (x-y)(x+y)$ であることと，$I$ 上 $|x+y|$ は上から抑えられることから従う。

(3) 任意の $\delta > 0$ に対して，$x = 1/\delta,\ y = (1/\delta)+\delta$ とおくと，$|f(x)-f(y)| = \delta^2+2$ となることから従う。

**[4]** (1) $(a,b) = (0,0)$ のとき，

$$f(0,0) = \iint_{D(0,0)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D(0,0) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

となる。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，

$$f(0,0) = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{2\pi}{3}$$

となる。

(2) $x = 2^{-a} r\cos\theta,\ y = 2^{-b} r\sin\theta$ とすると，

$$f(a,b) = 2^{-(a+b)} f(0,0) = \frac{2\pi}{3} 2^{-(a+b)}$$

となる。$(a,b) = (\cos t, \sin t)$ とパラメータ表示すると，$f(a,b)$ は $t$ の関数となり，

$$f(t) = \frac{2\pi}{3} 2^{-(\cos t+\sin t)}$$

と表される。よって，$(a,b) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ のとき $f(a,b)$ は最小値 $\dfrac{2\pi}{3}2^{-\sqrt{2}}$ を取り，$(a,b) = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ のとき $f(a,b)$ は最大値 $\dfrac{2\pi}{3}2^{\sqrt{2}}$ を取る。

| 令和６年度（１０月期入学）及び令和７年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験<br>**解 答 例** | |
|---|---|
| 専 攻 名 | 数物科学専攻（数学コース）（一般選抜） |
| 試験科目名 | 専門科目 数学　（３／３） |

[5] (1) $\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{e^z - 1} = 1/(e^z)'|_{z=0} = 1 \neq 0$ なので 1 位の極である。

(2) $a_{-1} = \lim_{z\to 0} zf(z) = 1$ である。

(3) 定義より $f(z)(e^z - 1) = 1$ なので，この式を展開することにより漸化式を得る。また $a_0 = -\dfrac{1}{2}$ である。

(4) $f(z) - a_0$ を考えると奇関数であることがわかる。また，$a_1 = \dfrac{1}{12}$, $a_3 = -\dfrac{1}{720}$ である。

[6] (1) 任意の $a \in A$ に対して，ある正の数 $\varepsilon$ が存在し，

$$N_d(a\,;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\} \subset A$$

となるとき，$A$ は $(X,d)$ の開集合であるという。

(2) $X = \{x\}$ の場合は容易。以下，$X \neq \{x\}$ とする。$p$ を $B$ の補集合 $B^c$ の任意の元とすると，$p \neq x$ より $d(p,x) > 0$ となる。そこで $\varepsilon$ として，$\varepsilon < d(p,x)$ となる正の数を取ると，$N_d(p\,;\varepsilon) \subset B^c$ である。よって，$B^c$ は $(X,d)$ の開集合であり，$B$ は $(X,d)$ の閉集合である。

(3) 偽である。$f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = x^2$ とすると，$f$ は $\boldsymbol{R}$ 上で連続である。$O = (-1,1)$ とすると，これは $\boldsymbol{R}$ の開集合であるが，$f(O) = [0,1)$ となり，$f(O)$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合ではない。なぜなら $0 \in f(O)$ でどんな正の数 $\varepsilon$ をとっても $N_d(0\,;\varepsilon) \not\subset [0,1)$ となるからである。