解答 I

問１　展開すると

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = n - \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$
$$\frac{n}{1-e^{-n}} = n + O(ne^{-n})$$

が得られる。これらより

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} - \frac{n}{1-e^{-n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\Big(-\frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O(ne^{-n})\Big) = -\frac{1}{2}$$

を得る。

問２　場合分けをすると

$$f(x) = \begin{cases} (-x-2)(1-x) & -\infty < x < 0 \\ (x-2)(1-x) & 0 \leqq x < 1 \\ (x-2)(x-1) & 1 \leqq x < \infty \end{cases}$$

である。これより，$x = -\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとることが導かれる。

問３　被積分関数の原始関数を $F(t)$ をとすると

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x^2}^{1} \frac{\sin t}{t^2+2}\,dt = \frac{d}{dx}(F(1) - F(-x^2)) = 2xF'(-x^2) = -2x\frac{\sin(x^2)}{x^4+2}$$

となる。

解答 II

問 1 に関しては，二つの解法をあげておく。

問 1 【解答 1】

(1) 次のことからわかる。

- f が $\mathbb{R}^2$ 上連続であること，
- $f(0,0)=0$,
- $r := \sqrt{x^2+y^2} > 4$ のとき $f(x,y)<0$ であること。このことは，次のようにしてわかる。そのような x, y に対して $|x| \leqq r$ と $|y| \leqq r$ がわかり，

$$f(x,y) = 2x^2y - 2x^4 - y^4 \leqq 2x^2y - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \leqq 2r^3 - \frac{1}{2}r^4 = \frac{r^3}{2}(4-r) < 0$$

である。

(2) まず

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(y-2x^2) \implies x=0 \text{ または } y=2x^2$$

と

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 4y^3 \implies 2y^3 = x^2$$

から，(1) を考慮に入れると最大値は 3 点 $(0,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ のどれかにおいてとることがわかる。

$$f(0,0)=0, \quad f\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{16}, \quad f\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{16}$$

より，f の $\mathbb{R}^2$ 上の最大値は $\frac{1}{16}$ である。

【解答 2】

(1)，(2) $f(x,y) = -2\left(x^2-\frac{y}{2}\right)^2 - \left(y^2-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}$ より，$f(x,y) \leqq \frac{1}{16}$ がわかる。ここで，$x^2-\frac{y}{2}=0$, $y^2-\frac{1}{4}=0$ を解いて，$(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ が得られる。つまり，$f(x,y)$ は $(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ で最大値 $\frac{1}{16}$ をとる。

問 2 極座標を用いて，

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2+3}\,dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{r^2+3}\; rdrd\theta \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{r^2+3}\;(2r)\,dr \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{u+3}\,du \\
&= \frac{\pi}{4}\Big[\frac{2}{3}(u+3)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{6}(8-3\sqrt{3})
\end{aligned}$$

と計算される。

解答 III

問１　与えられた行列を行基本変形して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得るので，その階数は次になる。

$$\begin{cases} 3 & (s \neq 0) \\ 2 & (s = 0) \end{cases}$$

問２　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，a, b, c, d のうち，少なくとも一つは 0 ではない。このとき，A とその転置行列 ${}^tA$ の積のトレースを考えると

$$\mathrm{tr}\,(A\ {}^tA) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$$

となり，仮定に矛盾する。よって $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

問３　$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

解答 IV

問１　A の行列式 $\det A = 1 - t$ が得られる。よって，$t = 1$。

問２　$AX = I$ とすると $\det(AX) = \det I$ である。$\det I = 1$ であるが，$\det(AX) = (\det A)(\det X) = 0$ となり，矛盾が得られる。

問３　$\det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda - 2)$ より，固有値は 0 (重複度 2) と 2 (重複度 1) である。固有値 λ の固有空間を V_λ で表すと V_0 の基底 $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$V_2$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

問４　ここで A が対角化可能であるための必要十分条件は $\dim V_0 + \dim V_2 = 3$ であるが，今の場合，$\dim V_0 = 1$，$\dim V_2 = 1$ である。よって A は対角化できない。

解答 V

問 1-4 は線積分 $\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算する。

問 1　点 OP 間は $y = 0$ であり，x 方向に働く力が 0 であるため，$W_1 = 0$ となる。

問 2　点 PQ 間は $x = 1$ であり，y 方向に働く力が b であるため，$W_2 = \int_0^1 b dy = b$ となる。

問 3　点 QR 間は $y = 1$ であり，x 方向に働く力が a であるため，$W_3 = \int_1^0 a dx = -a$ となる。

問 4　点 RO 間は $x = 0$ であり，y 方向に働く力が 0 であるため，$W_4 = 0$ となる。

問 5　$\boldsymbol{F}$ が保存力であるとき，$\boldsymbol{F}$ が閉じた経路に沿ってした仕事は 0 となるため，$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0$ となる。

問 6　問 1-5 より $b - a = 0$ であるから $a = b$ である。

解答 VI

問 1 $\sigma = \frac{Q}{S}$となる。

問 2 概略図の例は図 1 に示す。説明：xy 平面に直交して離れる方向に電場の向き。図 1 は太い横線が xy 平面で，xz 平面および yz 平面に平行な面上の電気力線の概略図である。

問 3 図 1 の様に電場は $z > 0$ で $\boldsymbol{E} = (0, 0, E)$ かつ $z < 0$ で $\boldsymbol{E} = (0, 0, -E)$ である。平板の一部を囲む閉曲面 (平板の面積 S) を考えると，ガウスの法則より，$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ で $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ である。よって

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} (0, 0, \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}) & (z > 0) \\ (0, 0, -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}) & (z < 0) \end{cases}$$

となる。

問 4 図 2 に概略図の例を示す。 説明：等電位面は xy 平面に平行な平面となる。概略図の太い横線が xy 平面で，他の横線は xy 平面に平行な平面を示している。

問 5 電位を V，電場ベクトルの z 成分を E_z とすると，$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ である。 よって，$z > 0$ で $V(z) = \frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0}$， $z < 0$ で $V(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}$ となる。グラフの例は図 3。

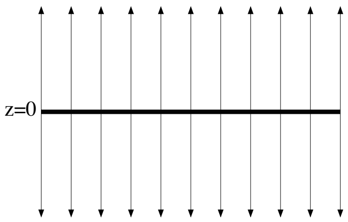

図 1: 問 2 の概略図

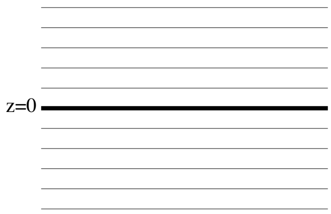

図 2: 問 4 の概略図

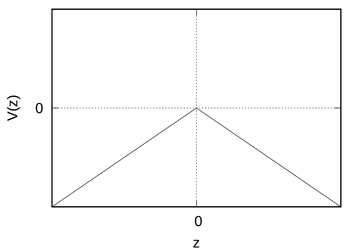

図 3: 問 5 のグラフ

解答 VII

問 1 $\hat{H}f_a(x) = Ef_a(x)$ より，$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}\cos kx = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\cos kx = E\cos kx$，$\hat{H}f_b(x) = Ef_b(x)$ より，$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}\sin kx = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\sin kx = E\sin kx$ であるから，$E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ である。

問 2 $\hat{p}f_a(x) = -i\hbar\dfrac{d}{dx}f_a(x) = i\hbar k f_b(x)$ となり，$\hat{p}f_a$ は f_a の定数倍にならないため，f_a は $\hat{p}$ の固有関数でない。$\hat{p}f_b(x) = -i\hbar\dfrac{d}{dx}f_b(x) = -i\hbar k f_a(x)$ となり，$\hat{p}f_b$ は f_b の定数倍にならないため，f_b は $\hat{p}$ の固有関数でない。

問 3 $f_a(L) = f_a(0)$ より，$\cos kL = 1$，$f_b(L) = f_b(0)$ より，$\sin kL = 0$ であるから，$kL = 2n\pi$ となる。よって，$\gamma = 2\pi$ である。

問 4 $k_n = \dfrac{2\pi}{L}n$ であるから，$E_n = \dfrac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \dfrac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}n^2$ となる。

問 5 f_a と f_b の規格化条件より

$$1 = \int_0^L dx\,|f_a(x)|^2 = A^2\int_0^L dx\cos^2 k_n x = \frac{A^2 L}{2},\ 1 = \int_0^L dx\,|f_b(x)|^2 = A^2\int_0^L dx\sin^2 k_n x = \frac{A^2 L}{2}$$

である。よって，$A = \sqrt{\dfrac{2}{L}}$ が得られる。

問 6 $\displaystyle\int_0^L dx f_a^*(x)f_b(x) = A^2\int_0^L dx\sin k_n x\cos k_n x = 0$

問 7 それぞれ $p_{aa} = 0$，$p_{ab} = -i\hbar k_n$，$p_{ba} = i\hbar k_n$，$p_{bb} = 0$ である。

問 8 固有値方程式 $\hbar k_n\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_a\\ c_b\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}c_a\\ c_b\end{pmatrix}$ を解いて，

固有値 $\lambda = \pm\hbar k_n$，固有ベクトル $\begin{pmatrix}c_a\\ c_b\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix}$（複号同順）。

問 9 $\psi(x) = c_a f_a(x) + c_b f_b(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}(\cos k_n x \pm i\sin k_n x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}e^{\pm ik_n x}$

解答 VIII

問 1　分子間に陽に働く相互作用はなく，分子が区別できないことによる因子 $\dfrac{1}{N!}$ を乗じて，$Q = \dfrac{q_0^N}{N!}$ となる。

問 2　問題文に与えられている公式を用いて，$U = \dfrac{5}{2} N k_{\mathrm{B}} T$ を得る。

問 3　定積熱容量は $\dfrac{dU}{dT}$ から計算できる。よって，$\dfrac{5}{2} N k_{\mathrm{B}}$ となる。

問 4　問題文に与えられている公式を用いると，$q_0 = 16\sqrt{2}\alpha V M^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{7}{2}} I (k_{\mathrm{B}} T)^{\frac{5}{2}}$ となるため，$\gamma = 16\sqrt{2}\alpha V M^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{7}{2}} I$ を得る。

解答 IX

解答例として，C 言語によるプログラムの例を挙げる。

```
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
#include <math.h>

int main() {
    int i, k, n;
    bool bAna, bLA;

    for (n = 2; n <= 25; n++) {
        bAna = false;
        bLA = false;

        for (i = 1; i <= n - 1; i++) {
            k = round(100.0 * i / n);
            if (k == 69) {
                bLA = true;
            }
            if (k == 94) {
                bAna = true;
            }
        }

        if (bAna && bLA) {
            printf("%d\n", n);
        }
    }
}
```

解答 X

解答例として，Fortran によるプログラムの例を挙げる。

```
program main
  implicit none
  integer, parameter :: n = 10000
  real(8), parameter :: yn = 10d0, dy = yn/n
  real(8) :: y, psi, phi, psi_new, phi_new, eps
  integer :: i
  print *, "Input a value of eps"
  read(5,*) eps
  psi = exp(-0.5d0*yn*yn)
  phi = -yn*exp(-0.5d0*yn*yn)
  do i = n, 1, -1
    y = i*dy
    psi_new = psi - dy*phi
    phi_new = phi - dy*(y*y - eps)*psi
    psi = psi_new
    phi = phi_new
  enddo
  print *, "psi x phi = ", psi*phi
end program
```