２０２４年度（１０月期）及び ２０２５年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程入学試験

数物科学専攻・数学コース

専門科目

（注　意）

1　問題冊子は指示があるまで開かないこと。

2　問題冊子は本文３ページ，答案用紙は４枚，下書き用紙は３枚である。

3　問題は全部で６問ある。その中から４問を選択して，１問につき１枚の答案用紙に解答せよ。その際，答案用紙の解答欄（横線の下）左上の［　］欄に解答する問題番号を記入すること。

4　解答はすべて答案用紙の解答欄に記入すること。答案用紙の裏を使ってもよいが，この場合は解答欄に裏を使うことを明記し，裏面においては上部（おもて面の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。

5　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること。

6　問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。

試験問題の本文は次のページから始まる。

次の問題 [1] ～ [6] の中から 4 問を選択して解答せよ。

[1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。

(2) A の各固有値 λ に対する固有空間 $W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ と広義固有空間

$$\widetilde{W}_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \text{ある } m \geq 1 \text{ に対して } (A - \lambda E)^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

を求めよ。ただし，E は 3 次の単位行列である。

(3) $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような 3 次の正則行列 P を一つ求めよ。

[2] 実数を成分にもつ 2 次正方行列全体のなす実ベクトル空間を V とする。V の基底 $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める。a, b, c を実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ とする。V から V への写像 T_A を

$$T_A(X) = AX, \qquad (X \in V)$$

により定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) T_A は V から V への線形写像であることを示せ。

(2) V の基底 S に関する写像 T_A の表現行列を求めよ。

(3) A の階数を r とするとき，T_A の階数を r を用いて表せ。

[**3**] 次の問いに答えよ。

(1) 微分可能な関数 $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の導関数が最大値及び最小値を持つとき，f は一様連続であることを示せ。

(2) 関数 $f(x) = x^2$ は開区間 $I = (a, b)$ $(a, b \in \boldsymbol{R}, a < b)$ 上一様連続であることを示せ。

(3) 関数 $f(x) = x^2$ は $\boldsymbol{R}$ 上一様連続でないことを示せ。

[**4**] ２つの実数の組 (a, b) に対して，$f(a, b)$ を

$$f(a,b) = \iint_{D(a,b)} \sqrt{1 - 4^a x^2 - 4^b y^2}\, dxdy, \quad D(a,b) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 4^a x^2 + 4^b y^2 \leq 1\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0, 0)$ の値を求めよ。

(2) $\{(a, b) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$ における $f(a, b)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

令和６年度（１０月期入学）及び令和７年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **問題用紙**		
専攻名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 数学	P.（３／３）

---

[5] $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ は $z=0$ で一位の極を持つことを示せ。

(2) $f(z)$ の原点におけるローラン展開を

$$\frac{a_{-1}}{z}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

とする。このとき，留数 a_{-1} を求めよ。

(3) (2) における $f(z)$ のローラン展開において，f のローラン展開の係数 $\{a_k\}_{k=-1}^{\infty}$ が，任意の $p\geq 1$ に対して，漸化式

$$\sum_{s=0}^{p}\frac{a_{s-1}}{(p-s+1)!}=0$$

を満たすことを示せ。さらに，係数 a_0 を求めよ。

(4) (2) における $f(z)$ のローラン展開において，$f(z)-a_0$ が奇関数であることを示せ。さらに，係数 a_1 と a_3 を求めよ。

[6] (X,d) を距離空間とする。ただし，X は空でない集合，d は X 上の距離関数とする。次の問いに答えよ。

(1) X の部分集合 A が (X,d) の開集合であることの定義を述べよ。

(2) x を X の元とする。このとき，$B=\{x\}$ は (X,d) の閉集合であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{R}$ を１次元ユークリッド空間とする。このとき，命題「$f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を連続写像とする。O が $\boldsymbol{R}$ の開集合ならば，$f(O)$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合である」が真か偽かを述べよ。また，真であれば命題を証明し，偽であれば命題の反例を１つあげ，それが反例となる理由を述べよ。