

問題用紙

専攻名	機械科学専攻, フロンティア工学専攻, 電子情報通信学専攻, 地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース	
試験科目名	数学	P. (1/1)

2024年8月20日(火) 9:00 - 10:00

- [注意] 1. 問題 I, II, III, IV のうち, 2題を選択して解答すること。
 2. 解答は選択問題ごとに分けて, 1題を1枚の答案用紙の表だけに書くこと。
 3. 選択問題の番号を, 各答案用紙左上の 内に記入すること。

I 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 x} dx + \frac{\cos y}{\cos x} dy = 0 \quad (2) \frac{dy}{dx} + 2xy + e^{2x^2} y^3 = 0$$

$$(3) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (4) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + 2x$$

II ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x - y, xyz, xy^2)$ を考える。曲面 S をベクトル方程式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ ($u^2 + v^2 \leq 1$) で与える。

問1 ベクトル場 \mathbf{A} の回転 $\text{rot } \mathbf{A}$ を求めよ。

問2 曲面 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$ を求めよ。

問3 面積分 $\iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ。ただし, 上で求めた単位法線ベクトル \mathbf{n} の向きを曲面 S の正の向きとする。

III 虚数単位を i として, 以下の問に答えよ。

問1 複素平面上の単位円を $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とするとき, 任意の整数 n に対して, 等式

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{ie^{2i\theta}} d\theta = -i \int_C \frac{e^{iz^2}}{z^{n+1}} dz$$

が成り立つことを示せ。さらに, $n = 0, \pm 1$ のそれぞれに対して, この積分の値を計算せよ。

問2 実数 θ に対して, $e^{ie^{2i\theta}}$ の実部と虚部の両方を求めよ。

問3 積分 $\int_0^\pi e^{-\sin 2\theta} \cos(\cos 2\theta) d\theta$ の値が π であることを示せ。

IV $f(x)$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の関数で,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (-1 \leq x < 0) \\ -x^2 + 1 & (0 \leq x < 1) \end{cases} \quad \text{及び} \quad f(x) = f(x+2) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする。

問1 実数 $k > 0$ に対して, $\int_0^1 f(x) \sin kx dx$ を計算せよ。

問2 実数 $k > 0$ が $\sin kx = \sin k(x+2)$ ($x \in \mathbb{R}$) を満たすならば, k は自然数 n を用いて, $k = n\pi$ と表されることを示せ。

問3 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。