令和６年度（１０月期入学）及び令和７年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験

解 答 例

専攻名	機械科学専攻，フロンティア工学専攻，電子情報通信学専攻，地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース	
試験科目名	数学 (公開用)	P.（1／1）

I　以下 C, C_1, C_2 は任意定数である。

(1) $M = \dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 x}, N = \dfrac{\cos y}{\cos x}$ とおくと，$M_y = N_x = \dfrac{\cos y \sin x}{\cos^2 x}$ なので，完全微分方程式である。よって一般解は，$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin\xi \sin y}{\cos^2 \xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \cos\eta\,\mathrm{d}\eta = \frac{\sin y}{\cos x} = C$，すなわち，$\underline{\sin y = C\cos x}.$

(2) ベルヌーイの微分方程式である。$u = y^{-2}$ とおくと，u は，線形微分方程式 $u' - 4xu = 2e^{2x^2}$ の解で，$u = e^{2x^2}(2x + C)$ である。よって，一般解は，$\underline{y^2 e^{2x^2}(2x + C) = 1}.$

(3) 2 階斉次線形微分方程式である。特性方程式 $s^2 + 3s + 2 = 0$ の解は，-2 と -1 なので，一般解は，$\underline{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}}.$

(4) 特殊解を $Y = Ax^2 + Bx + C$ とおいて，微分方程式に代入すると，$A = 1, B = -2, C = 2$ を得る。よって，$Y = x^2 - 2x + 2$ で，(3) と合わせて，一般解は，$\underline{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2}.$

II　問 1　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (2xy - xy, 0 - y^2, yz + 1) = \underline{(xy, -y^2, yz + 1)}.$

問 2　$\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v} = (0\cdot 2v - 1\cdot 2u, 2u\cdot 0 - 2v\cdot 1, 1\cdot 1 - 0\cdot 0) = (-2u, -2v, 1)$ より，$\underline{\boldsymbol{n} = \dfrac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}}.$

問 3　円周 ∂S は，$\mathrm{c} = (\cos\theta, \sin\theta, 1)\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ で表され，単位接ベクトルは，$\mathrm{d}\boldsymbol{c} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,\mathrm{d}\theta$ である。よって，ストークスの定理を用いると

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{dc} = \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta, \cos\theta\sin\theta, \cos\theta\sin^2\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,\mathrm{d}\theta = \underline{\pi}.$$

III　問 1　$z = e^{i\theta}\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ と変数変換すれば，$\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{ie^{2i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_C z^{-n} e^{iz^2} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = -i\int_C \frac{e^{iz^2}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$
$n = -1, 0, 1$ に対する右辺の複素積分は，それぞれ，コーシーの積分定理，コーシーの積分公式，グルサの公式を適用すると，$\displaystyle\int_C e^{iz^2}\,\mathrm{d}z = 0, \int_C \frac{e^{iz^2}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i, \int_C \frac{e^{iz^2}}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{2iz^2}\Big|_{z=0} = 0$ である。よって，求める積分の値は，$\underline{n = \pm 1 \text{ のときは } 0}$，$\underline{n = 0 \text{ のときは } 2\pi}.$

問 2　オイラーの公式より，$e^{ie^{2i\theta}} = e^{i\{\cos 2\theta + i\sin 2\theta\}} = e^{-\sin 2\theta} e^{i\cos 2\theta} = e^{-\sin 2\theta}\{\cos(\cos 2\theta) + i\sin(\cos 2\theta)\}$ なので，$\underline{\text{実部は，} e^{-\sin 2\theta}\cos(\cos 2\theta)}$，$\underline{\text{虚部は，} e^{-\sin 2\theta}\sin(\cos 2\theta)}.$

問 3　問 1 と問 2 より，$\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\sin 2\theta}\cos(\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$ である。この左辺の積分は，積分範囲を $\theta = \pi$ で 2 分割して，後半の積分に変数変換 $\varphi = \theta - \pi$ を適用すると，$\displaystyle\int_\pi^{2\pi} e^{-\sin 2\theta}\cos(\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi e^{-\sin 2\varphi}\cos(\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ であることから，$\displaystyle 2\int_0^\pi e^{-\sin 2\theta}\cos(\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ に等しい。よって，求める積分の値は，π である。

IV　問 1　部分積分を 2 回行うと，

$$\int_0^1 f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x^2 + 1)\sin kx\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{1}{k} + \frac{2}{k^3} - \frac{2}{k^2}\sin k - \frac{2}{k^3}\cos k}.$$

問 2　$x = -1$ とすると，$\sin k = 0$ が得られることから，$k = n\pi$（n は自然数）と表せる。またこのとき，任意の x に対して，$\sin kx = \sin k(x + 2)$ は成立する。

問 3　$f(x)$ は，不連続点を除いて奇関数なので，フーリエ正弦級数を求める。問 1 の結果を用いて，$\displaystyle b_n := 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^3}(1 - (-1)^n)$ だから，フーリエ級数は，

$$\underline{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^3}(1 - (-1)^n)\right)\sin(n\pi x).}$$