I

問１

(1)

$$\delta_P = \frac{3}{2}\frac{P\ell}{SE}, \quad \delta_F = -\frac{5}{2}\frac{F\ell}{SE}$$

(2)

$$F = \frac{3}{5}P, \quad \sigma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{5}\frac{P}{S}, \quad \sigma_{\mathrm{C}} = -\frac{3}{5}\frac{P}{S}$$

問２

(1)

$$T_1 = \frac{G\pi d^4}{32\ell}\phi_0, \quad T_2 = \frac{G\pi(d_{\mathrm{O}}^4 - d^4)}{96\ell}\phi_0$$

(2)

$$d_{\mathrm{O}} = \sqrt{2}d, \quad T_0 = \frac{G\pi d^4}{16\ell}\phi_0$$

II

問１

(1)

$M_1(x) = -(\ell - x)P$　（はりを下に凸に曲げようとする曲げモーメントを正とした場合）

(2)

$$\theta_1(x) = \frac{P}{2EI}x(2\ell - x)$$

(3)

$$\theta_{1C} = \frac{3P\ell^2}{8EI},\quad w_{1C} = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

(4)

$$\theta_{1B} = \frac{P\ell^2}{2EI},\quad w_{1B} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

問２

(1)

$$w_{2C} = \frac{5P\ell^3}{48EI} - \frac{R\ell^3}{24EI}$$

(2)

$$w_{2B} = \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{5R\ell^3}{48EI}$$

問３

(1)

$$R_C = \frac{5P}{4}$$

(2)

$$w_{3C} = \frac{5P\ell^3}{96EI}$$

(3)

$$w_{3B} = \frac{13P\ell^3}{64EI}$$

I

問１

$$-a^2k\theta$$

問２

$$-mgL\theta$$

問３

$$mL^2$$

問４

$$mL^2\ddot{\theta} = -(a^2k + mgL)\theta$$

問５

$$\omega = \sqrt{\frac{a^2k + mgL}{mL^2}}$$

$$A = \theta_0$$

II

問１　バネ１（バネ定数k_1）の自然長からの伸びをδ_1とすると，$\delta_1 = mg/k_1$

バネ２（バネ定数k_2）の自然長からの伸びをδ_2とすると，$\delta_2 = mg/k_2$

問２　１次と２次の固有角振動数ω_1，ω_2

$$\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix} = \sqrt{\frac{k_2}{2m}+\frac{k_1+k_2}{M}\mp\sqrt{\left\{\frac{k_2}{2m}+\frac{k_1+k_2}{M}\right\}^2-\frac{2k_1k_2}{Mm}}}$$

問３　定常振動解は,

$$x=\frac{F\left(3k_1-m\omega^2\right)}{\left(2k_1-m\omega^2\right)\left(3k_1-m\omega^2\right)-4k_1^2}\cos\omega t=\frac{F\left(3k_1-m\omega^2\right)}{m^2\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\frac{k_1}{m}-\omega^2\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\frac{k_1}{m}-\omega^2\right)}\cos\omega t$$

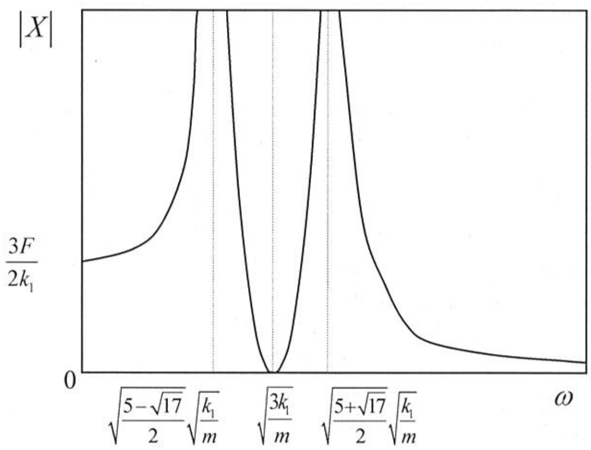
問４

$$|X|=\left|\frac{F\left(3k_1-m\omega^2\right)}{\left(2k_1-m\omega^2\right)\left(3k_1-m\omega^2\right)-4k_1^2}\right|$$

または

$$|X|=\left|\frac{F\left(3k_1-m\omega^2\right)}{m^2\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\frac{k_1}{m}-\omega^2\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\frac{k_1}{m}-\omega^2\right)}\right|$$

として，右図のとおり。



令和５年度（１０月期入学）及び令和６年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	フロンティア工学専攻（一般選抜）
試験科目名	専門科目　(a)機械工学系　③流れ学（５／２６）

I

問１　断面①における平均流速 v_1 は，体積流量を断面①の断面積で除することにより求まる。

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} \quad [\mathrm{m/s}]$$

問２　断面②における平均流速 v_2 は，体積流量を断面②の断面積で除することにより求まる。

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} \quad [\mathrm{m/s}]$$

問３　検査体積に単位時間に流入する運動量の x 方向成分は $\rho Q v_1$，流出する運動量の x 方向成分は $\rho Q v_2 \sin\theta$ であるから，次のように求まる。

$$\rho Q v_1 - \rho Q v_2 \sin\theta = \frac{4\rho Q^2}{\pi}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{\sin\theta}{d_2^2}\right) \quad [\mathrm{N}]$$

問４　検査体積に単位時間に流入する運動量の y 方向成分は 0 N，流出する運動量の y 方向成分は $-\rho Q v_2 \cos\theta$ であるから，次のように求まる。

$$0 - \left(-\rho Q v_2 \cos\theta\right) = \frac{4\rho Q^2 \cos\theta}{\pi d_2^2} \quad [\mathrm{N}]$$

問５　検査体積の境界面において，断面①以外はゲージ圧が 0 Pa であることから，断面①にはたらくゲージ圧 p_1 に断面①の断面積を乗じて次のように求まる。

$$\frac{p_1 \pi d_1^2}{4} \quad [\mathrm{N}]$$

問６　検査体積の境界面において，断面①以外はゲージ圧が 0 Pa であり，断面①は y 方向と平行であることから次のように求まる。

0　N

問７　運動量保存則より，問３と問５の結果を用いて次のように求まる。

$$F_x = \frac{4\rho Q^2}{\pi}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{\sin\theta}{d_2^2}\right) + \frac{p_1 \pi d_1^2}{4} \quad [\mathrm{N}]$$

問８　運動量保存則より，問４と問６の結果を用いて次のように求まる。

$$F_y = \frac{4\rho Q^2 \cos\theta}{\pi d_2^2} \quad \text{[N]}$$

問９　合力ベクトル $\boldsymbol{F}$ の大きさは次のように表せる。

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{[N]}$$

問１０　合力ベクトル $\boldsymbol{F}$ と x 軸のなす角度は次のように表せる。

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \quad \text{[rad]}$$

問１１　内径 r，外径 $r + dr$ の微小円管の面積は微小距離 dr の２次以上の項を無視すると $\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 \approx 2\pi r dr$ となるから，次のように表せる。

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = 2\pi u_{\max} \int_0^R \left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} r dr = \frac{\pi R^2 u_{\max}}{2} = \frac{\pi d_1^2 u_{\max}}{8} \quad [\mathrm{m^3/s}]$$

II

問 1　体積流量は一定なので

$$Q = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2, \qquad \therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

問 2　ベルヌーイの式より

$$\frac{p_0}{\rho} + gH = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}, \qquad \therefore p_2 - p_0 = \rho g H - \frac{1}{2} \rho v_2^2 \ \ \text{[Pa]}$$

問 3　体積流量は一定で，タービンの出入口の径が等しいので流速も等しい。ゆえに，エネルギー保存則として機械仕事を考慮したベルヌーイの式をタービンの出入口に適用すると

$$\frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} - W = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_0}{\rho}, \qquad \therefore W = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_0) \ \ \text{[J/kg]}$$

問 4　問 3 と問 2 から

$$W = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_0) = gH - \frac{1}{2} v_2^2$$

なので，動力 L_p は

$$L_\mathrm{p} = \rho Q W = \rho Q \left(gH - \frac{1}{2} v_2^2 \right) \ \ \text{[W]}$$

問 5

$$h_\mathrm{f} = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \ \ \text{[m]}$$

問 6

$$h_\mathrm{m} = (K_\mathrm{ent} + 2K_\mathrm{bnd} + K_\mathrm{SE}) \frac{v_1^2}{2g} \ \ \text{[m]}$$

問 7　水面とタービン出口に流体損失を考慮したベルヌーイの式を適用すると

$$\frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{1}{2g} v_2^2 + \frac{p_0}{\rho g} + h_\mathrm{t} + h_\mathrm{f} + h_\mathrm{m}, \qquad \therefore h_\mathrm{t} = H - \left(\frac{v_2^2}{2g} + h_\mathrm{f} + h_\mathrm{m} \right) \ \ \text{[m]}$$

問 8　水面とタービン入口に流体損失を考慮したベルヌーイの式を適用すると

$$\frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{1}{2g} v_2^2 + \frac{(p'_2 + p_0)}{\rho g} + h_\mathrm{f} + h_\mathrm{m}, \qquad \therefore p'_2 = \rho g \left(H - \frac{v_2^2}{2g} - h_\mathrm{f} - h_\mathrm{m} \right) = \rho g h_\mathrm{t} \ \ \text{[Pa]}$$

I

問１

１→２は断熱変化であるので，

$$\frac{T}{p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \text{const.}$$

よって，

$$\frac{T_1}{p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{T_2}{p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \qquad \therefore \frac{T_2}{T_1} = (p_2 / p_1)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

同様にして

$$\frac{T_3}{p_3^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{T_4}{p_4^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \qquad \therefore \frac{T_3}{T_4} = (p_3 / p_4)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

問２

熱効率は，サイクルにおける入熱量を q_H，放熱量を q_L，定圧比熱を C_p とすると，

$$\eta = 1 - \frac{q_L}{q_H} = 1 - \frac{C_p\left(T_4 - T_1\right)}{C_p\left(T_3 - T_2\right)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

ここで，

$$T_2 = T_1 \times \alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},\quad T_3 = T_4 \times \alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\therefore \eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_4\alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - T_1\alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = 1 - \frac{1}{\alpha^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = 1 - (1/\alpha)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

問３

１→２は断熱変化であるので，

$$p_1 v_1^{\kappa} = p_2 v_2^{\kappa}$$

$$\therefore \alpha = \frac{p_2}{p_1} = (v_1 / v_2)^{\kappa} = \varepsilon^{\kappa} = 6^{1.4} = 12.286$$

よって，熱効率は，

$$\therefore \eta = 1 - (1/\alpha)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 - (1/12.286)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 0.512$$

問４

2→３は等圧過程であるので，

$$\frac{T_2}{v_2} = \frac{T_3}{v_3}$$

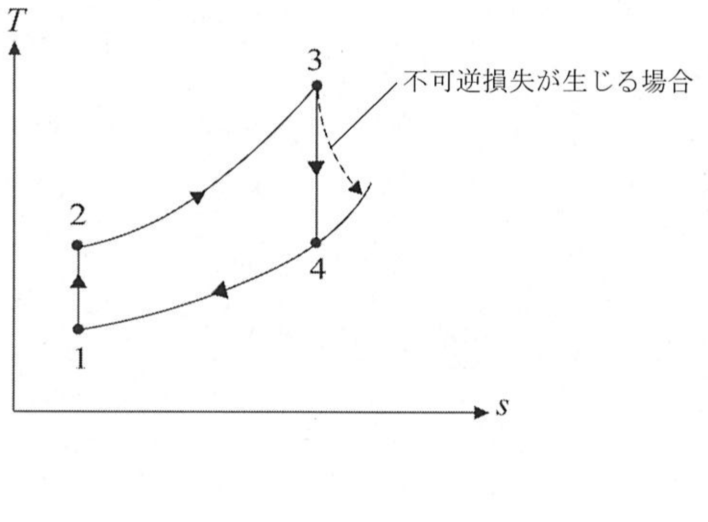
よって，エントロピー変化は

$$\Delta s = C_p \ln(T_3 / T_2) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \ln(v_3 / v_2) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \ln(0.7 v_1 / (1/6) v_1)$$

$$= \frac{1.4}{1.4 - 1} R \ln\left(4.2\right) = 5.02 R$$

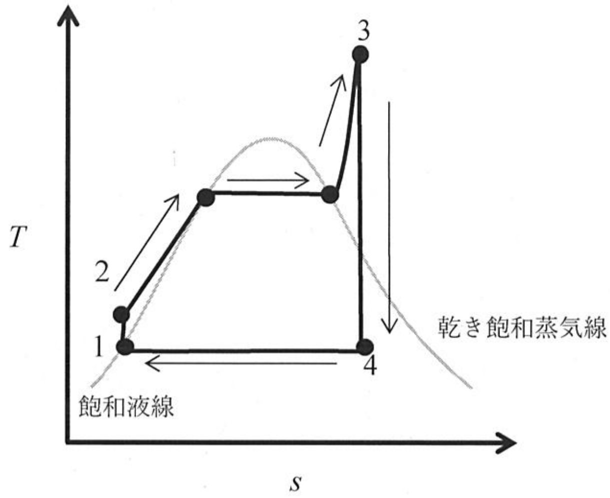
問５

不可逆損失が生じるとエントロピーが増大するので，T-s 線図に記入した経路となる。



II

問１



問２

発電電力に対する熱効率 η_c は,

$$\eta_c = \eta_t \cdot \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2} = 0.8 \cdot \frac{(3380 - 2010) - (150 - 138)}{3380 - 150} = 0.8 \cdot \frac{1358}{3230} = 0.336$$

よって，33.6 %（0.336 でも可）

問３

外気温度 $T_0 = 278$ K，室内温度 $T_r = 308$ K，ストーブ燃焼温度 $T_s = 2000$ K より，

ストーブ熱源より発生する熱量 Q のエクセルギーE_1は,

$$E_1 = Q\left(1 - {T_0}/{T_s}\right)$$

熱量 Q で暖房した室温が T_r に維持されているとすれば，暖房した部屋のエクセルギーE_2は

$$E_2 = Q\left(1 - {T_0}/{T_r}\right)$$

よって，エクセルギー効率η_eは,

$$\eta_e = \frac{E_2}{E_1} = \frac{Q\left(1 - {T_0}/{T_r}\right)}{Q\left(1 - {T_0}/{T_s}\right)} = \frac{1 - {278}/{308}}{1 - {278}/{2000}} = 0.113$$

よって，11.3 % (0.113 でも可)

問４

Q_{in}の発熱量の燃料から得られる熱量Q_{hp}は，

$$Q_{\mathrm{hp}} = Q_{\mathrm{in}} \cdot \eta_{\mathrm{c}} \cdot \varepsilon$$

である。

問５

ストーブで発生した熱量はすべて室内の加熱に利用されるため，発熱量Q_{st}は燃料発熱量Q_{in}の時，

$$Q_{\mathrm{st}} = Q_{\mathrm{in}}$$

である。

$$Q_{\mathrm{hp}} > Q_{\mathrm{st}}$$

$$Q_{\mathrm{in}} \cdot \eta_{\mathrm{c}} \cdot \varepsilon > Q_{\mathrm{in}}$$

が必要であるため，COP の条件は，

$$\varepsilon > 1/\eta_{\mathrm{c}}$$

となる。

令和５年度（１０月期入学）及び令和６年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	フロンティア工学専攻（一般選抜）
試験科目名	専門科目 (b)化学工学系　①プロセス工学量論（１２／２６）

I

問１

(1) $m^3 \cdot s^{-1}$

(2) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$

(3) $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

問２

(1) I, II に対する全物質収支はそれぞれ

$$F = D_1 + W_1$$

$$F = D_1 + D_2 + W_2$$

これより,

$$D_1 = F - W_1 = 50\ \mathrm{kg \cdot h^{-1}}$$

$$D_2 = F - D_1 - W_2 = 30\ \mathrm{kg \cdot h^{-1}}$$

(2) F, D_1, D_2 中の成分 A の質量分率をそれぞれ w_{AF}, w_{AD1}, w_{AD2} とおく。このとき I, II に対して A の成分収支はそれぞれ,

$$Fw_{\mathrm{AF}} = D_1 w_{\mathrm{AD1}} + W_1 w_{\mathrm{AW1}}$$

$$Fw_{\mathrm{AF}} = D_1 w_{\mathrm{AD1}} + D_2 w_{\mathrm{AD2}} + W_2 w_{\mathrm{AW2}}$$

これより, W_1 の成分 A の質量分率は,

$$W_1 w_{\mathrm{AW1}} = Fw_{\mathrm{AF}} - D_1 w_{\mathrm{AD1}} = (100)(0.50) - (50)(0.95) = 2.5$$

よって,

$$w_{\mathrm{AW1}} = \frac{2.5}{W_1} = \frac{2.5}{50} = 0.050$$

W_2 の成分 A の質量分率は

$$W_2 w_{\mathrm{AW2}} = Fw_{\mathrm{AF}} - D_1 w_{\mathrm{AD1}} - D_2 w_{\mathrm{AD2}} = (100)(0.50) - (50)(0.95) - (30)(0.07) = 0.40$$

よって,

$$w_{\mathrm{AW2}} = \frac{0.40}{W_2} = \frac{0.40}{20} = 0.020$$

問３

塔頂において低沸点成分に富んだ留出液をすべて塔内に還流する操作を全還流という。このとき，操作線の傾きは１となり，理論段数は最小の値となる。これを最小理論段数という。

問４

化学式　$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$

転化率が 0.90 なので，0.90 mol のプロパンが反応する。よって，流出するプロパンは 0.10 mol である。O_2 は(25)(0.21) = 5.25 mol 供給され，4.5 mol 消費されるので，0.75 mol 流出する。N_2 は(25)(0.79) = 19.75 mol 供給され，これがそのまま流出する。CO_2，H_2O はそれぞれ 2.7 mol，3.6 mol 生成し，それが流出する。よって，出口ガス各成分は C_3H_8: 0.10 mol，O_2: 0.75 mol，N_2: 19.75 mol，CO_2: 2.7 mol，H_2O: 3.6 mol だから，全部で 26.9 mol。よってプロパンのモル分率は

$$\frac{0.10}{26.9} = 0.00372 = 0.0037$$

【別解】

化学式　$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$　だから，

0.90 mol 反応後の燃焼ガス中の各成分の比は

$C_3H_8 : O_2 : N_2 : CO_2 : H_2O = 0.10 : (25)(0.21) - (0.90)(5) : (25)(0.79) : (0.90)(3) : (0.90)(4)$

よって

$$\frac{0.10}{0.10 + (25)(0.21) - (25)(0.79) + (0.90)(3) + (0.90)(4)} = 0.00372 = 0.0037$$

I

問１　レイノルズ数 $Re = \dfrac{DU\rho_w}{\mu_w}$，平均流速 $U = \dfrac{Q}{\dfrac{\pi}{4}D^2}$

問２　$Re = \dfrac{DU\rho_w}{\mu_w} = \dfrac{(205\times10^{-3})(0.10)(0.998\times10^3)}{10.1\times10^{-4}} = 20256 = 2.0\times10^4$

$Re > 2300$ より，この場合の流動状態は乱流である。

問３　内径 $D/10$ の円管に水を体積流量 Q_1 で流したときのレイノルズ数を Re_1 とする。

同じ流動状態にするにはレイノルズ数を同じにすれば良い。

また，平均流速 U_1 は，$U_1 = \dfrac{Q_1}{\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{D}{10}\right)^2}$ であるから，

$$\frac{Re_1}{Re} = \frac{\left(\dfrac{D}{10}\right)\dfrac{Q_1}{\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{D}{10}\right)^2}\rho_w}{\mu_w}\cdot\frac{\mu_w}{DU\rho_w} = \frac{Q_1}{\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{D}{10}\cdot DU} = 1$$

$$\therefore\ Q_1 = \frac{\pi}{40}D^2U$$

問４　内径 D の円管に空気を体積流量 Q_2 で流したときのレイノルズ数を Re_2 とする。

問３と同様に，レイノルズ数を同じにすれば良いので，

$$\frac{Re_2}{Re} = \frac{D\dfrac{Q_2}{\dfrac{\pi}{4}D^2}\rho_a}{\mu_a}\cdot\frac{\mu_w}{DU\rho_w} = \frac{Q_2}{\dfrac{\pi}{4}D^2U}\frac{\rho_a\mu_w}{\rho_w\mu_a} = 1$$

$$\therefore\ Q_2 = \frac{\pi}{4}D^2U\frac{\rho_w\mu_a}{\rho_a\mu_w}$$

II

問１　式(II.1)を，$r=r_\mathrm{o}$ で $T=T_\mathrm{o}$，$r=R$ で $T=T_\mathrm{R}$ の境界条件の下で解けば，

$$\dot{Q}_1=-\frac{2\pi Lk\left(T_\mathrm{R}-T_\mathrm{o}\right)}{\ln R-\ln r_\mathrm{o}}=\frac{2\pi Lk\left(T_\mathrm{o}-T_\mathrm{R}\right)}{\ln\left(R/r_\mathrm{o}\right)}$$

ゆえに，断熱材層内の熱抵抗は，$R_\mathrm{th1}=\dfrac{\ln\left(R/r_\mathrm{o}\right)}{2\pi Lk}$

問２　ニュートンの冷却法則より，対流熱伝達量 $\dot{Q}_2$ は，$\dot{Q}_2=h\left(2\pi RL\right)\left(T_\mathrm{R}-T_\infty\right)=2\pi RLh\left(T_\mathrm{R}-T_\infty\right)$

ゆえに，対流熱伝達過程における熱抵抗は，$R_\mathrm{th2}=\dfrac{1}{2\pi RLh}$

問３　円管外表面から周囲空気への熱通過過程における総括熱抵抗 R_Total は，断熱材層内の熱抵抗 R_th1 と断熱材外表面における対流熱伝達過程の熱抵抗 R_th2 の和となる。

したがって，この場合の伝熱量は，$\dot{Q}=\dfrac{T_\mathrm{o}-T_\infty}{R_\mathrm{Total}}=\dfrac{T_\mathrm{o}-T_\infty}{R_\mathrm{th1}+R_\mathrm{th2}}=\dfrac{T_\mathrm{o}-T_\infty}{\dfrac{\ln\left(R/r_\mathrm{o}\right)}{2\pi Lk}+\dfrac{1}{2\pi RLh}}=\dfrac{2\pi L(T_\mathrm{o}-T_\infty)}{\dfrac{\ln\left(R/r_\mathrm{o}\right)}{k}+\dfrac{1}{Rh}}$

問４　$\dot{Q}=\dfrac{2\pi L(T_\mathrm{o}-T_\infty)}{\dfrac{\ln\left(R/r_\mathrm{o}\right)}{k}+\dfrac{1}{Rh}}$ を R で微分すれば，$\dfrac{\mathrm{d}\dot{Q}}{\mathrm{d}R}=-\dfrac{2\pi L(T_\mathrm{o}-T_\infty)\left(\dfrac{1}{kR}-\dfrac{1}{hR^2}\right)}{\left\{\dfrac{\ln\left(R/r_\mathrm{o}\right)}{k}+\dfrac{1}{Rh}\right\}^2}$

$\dfrac{\mathrm{d}\dot{Q}}{\mathrm{d}R}=0$ を満たす $R=\dfrac{k}{h}$ のとき，伝熱量 $\dot{Q}$ は最大となる。

I

問 1

題意より，五酸化二窒素の 1 次反応で表されるため，1 次の速度式は次式で表される。

$$\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} = -k_\mathrm{r} C_\mathrm{A} \tag{1}$$

式(1)を式(2)のように変形し，$t=0$ のとき $C_\mathrm{A}=C_\mathrm{A0}$，$t=t$ のとき $C_\mathrm{A}=C_\mathrm{A}$ の条件で積分すると，式(3)が得られる。

$$\int_{C_\mathrm{A0}}^{C_\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}} = -k_\mathrm{r}\int_0^t \mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\ln\frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A0}} = -k_\mathrm{r} t \tag{3}$$

$$C_\mathrm{A} = C_\mathrm{A0}\exp\left(-k_\mathrm{r}t\right) \quad \cdots \quad \text{解答}$$

問 2

式(3)より，反応時間 t に対して $\ln\left(C_\mathrm{A}/C_\mathrm{A0}\right)$ をプロットしたときに得られる直線の傾きの -1 倍が速度定数 k_r となる。よって，

$$k_\mathrm{r} = -(-3.38\times10^{-5}) = 3.38\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1} \quad \cdots \quad \text{解答}$$

1 次反応において，C_A が C_A0 から $\frac{1}{2}C_\mathrm{A0}$ に減少する時間（半減期 $t_{1/2}$）は，式(3)から次のように求められる。

$$k_\mathrm{r}t_{1/2} = -\ln\frac{\frac{1}{2}C_\mathrm{A0}}{C_\mathrm{A0}} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

よって，半減期 $t_{1/2}$ は，

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_\mathrm{r}} = \frac{\ln 2}{3.38\times10^{-5}} = 2.051\times10^4 = 2.05\times10^4\ \mathrm{s}\ \text{（}=342\ \mathrm{min} = 5.70\ \mathrm{h}\ \text{でも可）} \quad \cdots \quad \text{解答}$$

時定数 τ は，反応物の濃度が初期値の $1/e$ まで減少する時間であるため，1 次反応では式(3)から次のように求められる。

$$k_\mathrm{r}\tau = -\ln\frac{\frac{1}{e}C_\mathrm{A0}}{C_\mathrm{A0}} = -\ln\frac{1}{e} = 1$$

よって，時定数は，

$$\tau = \frac{1}{k_\mathrm{r}} = \frac{1}{3.38\times10^{-5}} = 2.959\times10^4 = 2.96\times10^4\ \text{（}=493\ \mathrm{min} = 8.22\ \mathrm{h}\ \text{でも可）} \quad \cdots \quad \text{解答}$$

II

リンデマン―ヒンシェルウッド機構が成立する場合，成分濃度の逆数に対して実効的な速度定数の逆数をプロットすると直線が得られ，その直線の傾きの逆数から k_a を求められることから，次の関係が得られる。

$$\frac{1}{k_{r,2}}-\frac{1}{k_{r,1}}=\frac{1}{k_a}\left(\frac{1}{C_{A2}}-\frac{1}{C_{A1}}\right)$$

これより，次の解答が得られる。

$$k_a=\left(\frac{1}{C_{A2}}-\frac{1}{C_{A1}}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{k_{r,2}}-\frac{1}{k_{r,1}}\right)=\left(\frac{1}{1.00\times10^{-5}}-\frac{1}{4.37\times10^{-4}}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{2.20\times10^{-4}}-\frac{1}{1.70\times10^{-3}}\right)$$

$$=24.69=24.7\ \mathrm{dm^{-3}\cdot mol^{-1}\cdot s^{-1}}$$ … 解答

III

問１

図１のプロセスの微生物 X の物質収支は次式で表される。

$$\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t} = vC_\mathrm{X0} - vC_\mathrm{X} + r_\mathrm{X}V$$

定常状態において微生物濃度変化はないため，$\frac{\mathrm{d}C_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t} = 0$，反応器入り口での微生物濃度 $C_\mathrm{X0} = 0$，微生物増殖速度 $r_\mathrm{X} = \mu C_\mathrm{X}$ を代入すると，

$$-vC_\mathrm{X} + \mu C_\mathrm{X} V = 0$$

両辺を V で割り，$v/V = D$ とおくと，

$$C_\mathrm{X}(\mu - D) = 0$$

ここで，ウォッシュアウトでない（$C_\mathrm{X} \neq 0$）とき $D = \mu$ となり，希釈率を変化させることで反応器内の微生物増殖速度をコントロールすることができる。

問２

まず，ウォッシュアウトする臨界希釈率 D_crit を考える。

Monod の式 $\mu = \frac{\mu_\mathrm{max} C_\mathrm{S}}{K_\mathrm{S} + C_\mathrm{S}}$ より，

$$C_\mathrm{S} = \frac{K_\mathrm{S} D}{\mu_\mathrm{max} - D}$$

与式に代入して

$$C_\mathrm{X} = Y_\mathrm{X/S}\left(C_\mathrm{S0} - \frac{K_\mathrm{S} D}{\mu_\mathrm{max} - D}\right)$$

この式において $C_\mathrm{X} = 0$ のときの D が D_crit であるため，代入して整理すると，

$$D_\mathrm{crit} = \frac{\mu_\mathrm{max} C_\mathrm{S0}}{K_\mathrm{S} + C_\mathrm{S0}}$$

C_S0，μ_max，K_S にそれぞれ値を代入すると，

$$D_\mathrm{crit} = \frac{\mu_\mathrm{max} C_\mathrm{S0}}{K_\mathrm{S} + C_\mathrm{S0}} = \frac{2.50\times10^{-1} \cdot 4.75\times10^{-1}}{2.00\times10^{-1} + 4.75\times10^{-1}} = 0.175\cancel{9}\cdots = 1.76\times10^{-1}\ \mathrm{h}^{-1}$$

一方，設定条件における希釈率 D_set は，

$$D_\mathrm{set} = \frac{v}{V} = \frac{7.20\times10^{-2}}{1.25\times10^{-1}} = 5.76\times10^{-1}\ \mathrm{h}^{-1}$$

$D_\mathrm{set} > D_\mathrm{crit}$ となるため，菌体はウォッシュアウトして定常運転できない。

I

問１

(1)　内部エネルギーを U, エンタルピーを H とすると，比熱の定義式より，

$$C_p - C_V = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

1 モルの完全気体について，

$$H = U + pV$$

より，

$$C_p - C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + R - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = R$$

であるので，与式が示された。

(2) アルゴンは単原子完全気体であるので，

$$C_V = \frac{3R}{2}$$

したがって，

$$C_p = \frac{5R}{2}$$

求める熱量 Q は，

$$Q = 80.0/40.0 \times 5R/2 \times (45\text{-}25) = 8.31\times10^2\ \mathrm{J}$$

問２

(1) 完全気体においては，体積比はモル比と一致するので，

$$p_{\mathrm{O2}} = 10 \times 2.00\ /\ (3.00+2.00) = 4.00\ \mathrm{MPa}$$

(2) 酸素の分圧は，

$$p_{\mathrm{O2}} = 8 \times 2.00\ /\ (3.00+2.00) = 3.20\ \mathrm{MPa}$$

水中の酸素の質量モル濃度は，ヘンリーの法則より，

$$b_{\mathrm{O2}} = 3.20\times10^6\ /\ 7.92\times10^7 = 4.04\times10^{-2}\ \mathrm{mol/kg}$$

質量分率で表すと，

$$w_{\mathrm{O2}} = (4.04\times10^{-2}) \times (32.0\times10^{-3}) = 1.29\times10^{-3}$$

II

問１ 与えられた波動関数をシュレーディンガー方程式に代入して整理すると,

$$E = \frac{h^2 m_l^2}{8\pi^2 I}$$

を得る。

問２ 問１の結果より，吸収する電磁波のエネルギーは,

$$\Delta E = \frac{h^2}{8\pi^2 I}\left(2^2 - 1^1\right) = \frac{3h^2}{8\pi^2 I}$$

電子の質量を m_e，ベンゼンの半径を r とすると，慣性モーメントは $I = m_e r^2$ なので,

$$\Delta E = \frac{3h^2}{8\pi^2 m_e r^2} = \frac{3\times(6.63\times10^{-34})^2}{8\pi^2\times(9.11\times10^{-31})\times(0.14\times10^{-9})^2} = 9.4\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

（ベンゼンの半径の数値から，有効数字２桁）

問３ Planck の関係式より,

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

したがって,

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6.63\times10^{-34})\times(3.00\times10^{8})}{9.4\times10^{-19}} = 2.1\times10^{-7}\ \mathrm{m}$$

I

問1

電気回路の交流解析においては，入力される正弦波信号に対して振幅と位相のみが変化する。複素数表示を用いることで，振幅と位相の変化に対する計算を乗算および除算で表現することができ，三角関数を用いる時と比べて計算を簡易化することができる。

問2

$$|I|e^{j\frac{\pi}{2}} = j|I|\ [\mathrm{A}]$$

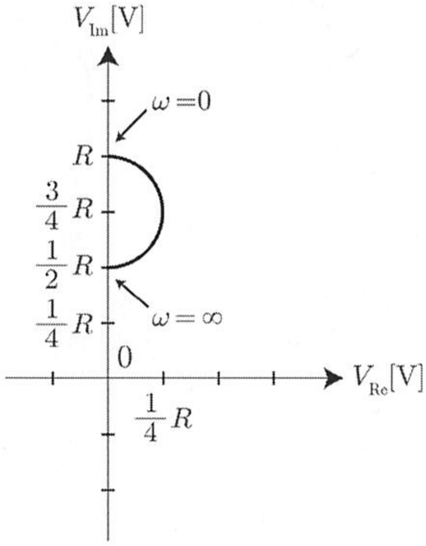
問3

$$V = \frac{jR(1 + j\omega CR)}{1 + j2\omega CR}|I|\ [\mathrm{V}]$$

問4

電圧Vの実部をV_{Re}，虚部をV_{Im}とすると，Vのフェーザ軌跡の式とグラフは以下の通りになる。

$$V_{\mathrm{Re}}^2 + \left(V_{\mathrm{Im}} - \frac{3}{4}R\right)^2 = \left(\frac{1}{4}R\right)^2$$



問5

$$P = \frac{R(1 + 2\omega^2C^2R^2)}{1 + 4\omega^2C^2R^2}\ [\mathrm{W}]$$

II

問１

$$i(t) = \frac{E}{R_1}\ [\mathrm{A}]$$

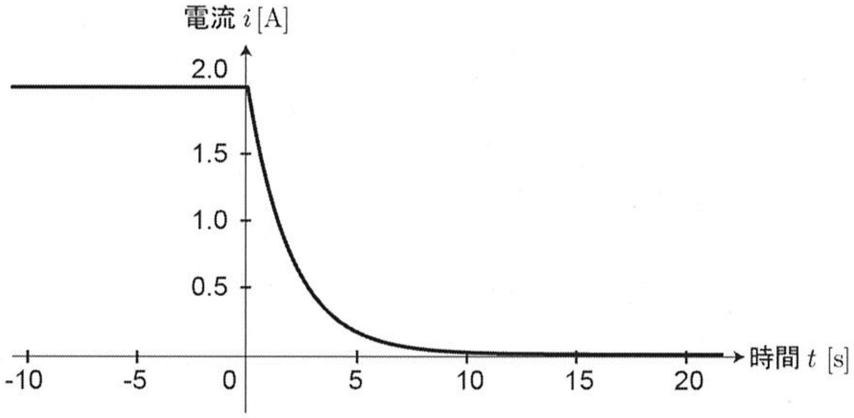
問２

$$L\frac{di(t)}{dt} + R_2 i(t) = 0$$

問３

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}t}\ [\mathrm{A}]$$

問４



I

問１　R_B と C_B の合成インピーダンスを Z とおくと $Z=\left(\dfrac{1}{R_B}+j\omega C_B\right)^{-1}=\dfrac{R_B}{1+j\omega C_B R_B}$ であるから，$H_1(\omega)$ は次式となる。

$$H_1(\omega)=-\frac{R_B}{R_A}\frac{1}{1+j\omega C_B R_B}$$

上式より，$\left|H_1(\omega)\right|$ は

$$\left|H_1(\omega)\right|=\frac{R_B}{R_A}\frac{1}{1+\sqrt{1+\omega^2 C_B^2 R_B^2}}$$

となるから，$H_0=\dfrac{R_B}{R_A}$，$\omega_{c1}=\dfrac{1}{C_B R_B}$ である。

問２　図２より，回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} v_i &= R\,i_1+\left(pR+\frac{1}{j\omega C}\right)i_3 \\ \frac{i_2}{j\omega qC} &= pR\,i_3 \quad\Longrightarrow\quad i_2=jpq\,\omega CR\,i_3 \\ \frac{i_3}{j\omega C} &= v_o \quad\Longrightarrow\quad i_3=j\omega C\,v_o \\ i_1 &= i_2+i_3 \quad\Longrightarrow\quad i_1=(1+jpq\,\omega CR)\,i_3 \end{aligned}$$

上式から，$H_2(\omega)$ は次式となる。

$$H_2(\omega)=\frac{1}{1-pq\,\omega^2C^2R^2+j\,(1+p)\,\omega CR}$$

問３　問２の解より，$\left|H_2(\omega)\right|$ は次式となる。

$$\left|H_2(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left\{(1+p)^2-2pq\right\}\omega^2C^2R^2+p^2q^2\omega^4C^4R^4}}$$

上式が２次バターワース LPF となるためには，分母の ω^2 の係数が０となれば良い。すなわち，

$$(1+p)^2=2pq$$

より，$q=\dfrac{(1+p)^2}{2p}$ である。

このとき，遮断角周波数 ω_{c2} は，$\omega_{c2}=\dfrac{1}{\sqrt{pq}\,CR}=\dfrac{\sqrt{2}}{(1+p)\,CR}$ となる。

問４　題意より，$H_1(\omega)$ と $H_2(\omega)$ は，次式と表すことができる。

$$H_1(\omega) = \frac{-H_0}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\dfrac{1+p}{\sqrt{pq}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

上式より，$H_3(\omega)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} H_3(\omega) &= H_1(\omega) \times H_2(\omega) \\ &= \frac{-H_0}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)} \times \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\dfrac{1+p}{\sqrt{pq}}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)} \\ &= \frac{-H_0}{1 - \left(1 + \dfrac{1+p}{\sqrt{pq}}\right)\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)\left\{\left(1 + \dfrac{1+p}{\sqrt{pq}}\right) - \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right\}} \end{aligned}$$

問５　$A = 1 + \dfrac{1+p}{\sqrt{pq}}$ とおいて $\left|H_3(\omega)\right|$ を求めると，次式となる。

$$\left|H_3(\omega)\right| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + (A^2 - 2A)\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + (A^2 - 2A)\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^4 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^6}}$$

上式が３次バターワース特性となるためには，分母の平方根の中の ω^2 の項の係数と ω^4 の項の係数が０であれば良い。すなわち，

$$A^2 - 2A = A\,(A - 2) = 0$$

であれば良い。ここで，$p > 0$，$q > 0$ であるから，$A > 0$ である。すなわち，$A = 1 + \dfrac{1+p}{\sqrt{pq}} = 2$ であるから，$q = \dfrac{(1+p)^2}{p}$ となる。

令和５年度（１０月期入学）及び令和６年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	フロンティア工学専攻（一般選抜）
試験科目名	専門科目　(c)電子情報工学系　③論理回路（２５／２６）

I.

問１　表１の通り。

問２　図 1(a)および(b)より，応用方程式は，

$$Q_{n+1(1)} = x\left(Q_{n(0)}\overline{Q_{n(1)}} + \overline{Q_{n(0)}}Q_{n(1)}\right)$$
$$= x\left(Q_{n(0)} \oplus Q_{n(1)}\right)$$
$$Q_{n+1(0)} = \bar{x}Q_{n(0)} + x\overline{Q_{n(0)}}$$
$$= x \oplus Q_{n(0)}$$
$$(A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B)$$

となる。図 1(c)より，出力の方程式は，

$$z = \bar{x}Q_{n(1)}$$

となる。

表 1. 状態遷移表

入力	現在の状態		次の状態		出力
x	$Q_{n(1)}$	$Q_{n(0)}$	$Q_{n+1(1)}$	$Q_{n+1(0)}$	z
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0

$Q_{n(1)}$	$Q_{n(0)} \setminus x$	0	1
0	0		
0	1		1
1	1		
1	0		1

図 1(a)　$Q_{n+1(1)}$のカルノー図

$Q_{n(1)}$	$Q_{n(0)} \setminus x$	0	1
0	0		1
0	1	1	
1	1	1	
1	0		1

図 1(b)　$Q_{n+1(0)}$のカルノー図

$Q_{n(1)}$	$Q_{n(0)} \setminus x$	0	1
0	0		
0	1		
1	1	1	
1	0	1	

図 1(c)　zのカルノー図

問３　図２の通り。

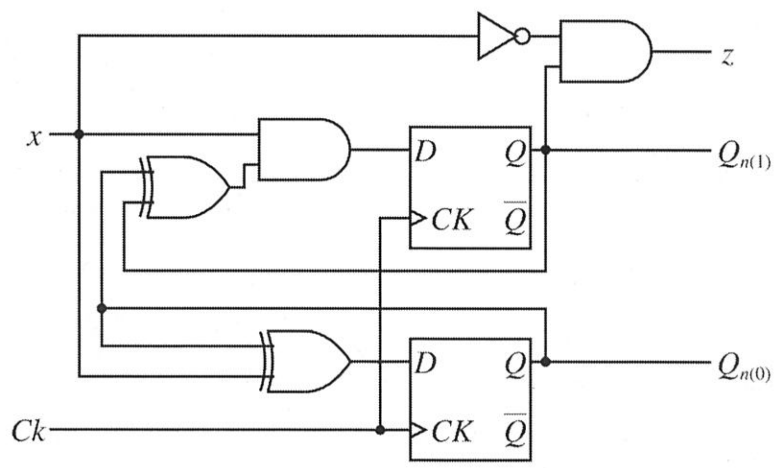


図２．回路図

問4　図3の通り。

問5　Dラッチ

問6

$$
\begin{aligned}
F &= AB + C \\
&= AB(C + \bar{C}) + (A + \bar{A})(B + \bar{B})C \\
&= ABC + AB\bar{C} + ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \\
&= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C
\end{aligned}
$$

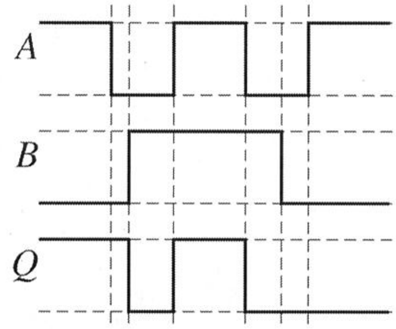


図3. 入力と出力の波形