令和５年度 (10月期入学) 及び 令和６年度
金沢大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験
数物科学専攻計算科学コース

専門科目

注意事項

1. 問題冊子は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文10ページであり，答案用紙は４枚，下書用紙は１枚である。
3. 数学 (I〜IV) と基礎物理 (V〜VIII) と計算機 (IX，X) の３分野の中から２分野以上の問題４問を選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。
4. １問につき１枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面においては上部 (表の横線の上に相当する部分) は使用しないこと。
5. 問題冊子と下書用紙は持ち帰ること。

（次のページから問題が始まります。）

I

以下の問いに答えよ。

問１　次の関数 $f(x)$ の $x=1$ におけるテイラー展開を２次の項まで求めよ。

$$f(x) = \frac{1}{1+\log x}$$

問２　$y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ とする。このとき，次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x \, dx$$

問３　次の広義積分が収束するかどうか調べよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

II

以下の問いに答えよ。

問１　条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，x^2-y の最大値を求めよ。

問２　２つの集合

$$\{(x,\ y,\ z) \mid -1 \leq x \leq 1,\ y^2+z^2 \leq 1\},$$
$$\{(x,\ y,\ z) \mid -1 \leq y \leq 1,\ x^2+z^2 \leq 1\}$$

の和集合 V の体積を求めよ。

III

以下の問いに答えよ。

問１　連立１次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

が解をもつような定数 a を求め，その a に対して連立１次方程式 $(*)$ を解け。

問２　行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式の値を求めよ。

問３　対角化可能である行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して固有値を求め，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を１つ求めよ。

IV

3 次元実列ベクトル空間を $\mathbb{R}^3$ と表し，行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(f(x) = Ax)$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

問１ $a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して，$f(a)$ を求めよ。

問２ 行列 A の階数を求めよ。

問３ $\dim \mathrm{Im}\, f$，$\dim \mathrm{Ker}\, f$ をそれぞれ求めよ。

問４ $\mathrm{Im}\, f$，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ。

問５ 問１の $a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して，$f(x) = f(a)$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ。

V

ばね定数 $k(>0)$ のばねの一端を固定し，他端に質量 $m(>0)$ の物体をつけて水平な机上におく。ばねの自然長の位置からはかった物体の変位を x，その速度を v とする。時刻 $t=0$ において物体の変位は $x(0)=x_0(>0)$，速度は $v(0)=0$ であり，$t>0$ の運動を考える。物体は質点とみなすことができるとして，以下，二つの場合について考える。

物体に働く抵抗力が無視できる場合を考える。物体の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx.$$

問１　方程式の一般解 $x(t)$ は，任意の定数 A,B を用いて

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

と書くことができる。正の定数 ω を m,k を用いて表せ。

問２　初期条件 $x(0)=x_0, v(0)=0$ より，定数 A,B を求めよ。

問３　変位 x が初めて 0 となる時刻 t_1 を m,k を用いて求めよ。

問４　時刻 t_1 における物体の速度を x_0,m,k を用いて求めよ。

速度に比例する抵抗力が物体に働く場合を考える。物体の運動方程式は正の定数 γ を用いて次のように表せる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-m\gamma\frac{dx}{dt}.$$

抵抗力の係数 γ は $\gamma=2\sqrt{k/m}$ である。

問５　方程式の解のひとつは定数 λ を用いて $e^{-\lambda t}$ と表せる。λ を求めよ。

問６　方程式の一般解は任意の定数 C,D を用いて

$$x(t)=(C+Dt)e^{-\lambda t}$$

と表せる。初期条件 $x(0)=x_0, v(0)=0$ より，C と D を x_0,γ,m,k から必要なものを用いて求めよ。

VI

真空中の電磁場を考える。電荷も電流も存在しないときのマクスウェル方程式は

$$\epsilon_0 \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = 0 \tag{a}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0 \tag{b}$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{c}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{d}$$

と書ける。なお，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。直交座標系 (x, y, z) を採用する。ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z))$ に対して

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

である。

ここで，電場は x 成分しか持たず，磁束密度は y 成分しか持たず，ともに x 座標と y 座標には依存せず z 座標と時刻 t に依存すると仮定する。すなわち，

$$\boldsymbol{E} = (E_x(z,t), 0, 0), \quad \boldsymbol{B} = (0, B_y(z,t), 0)$$

とすると，式 (a),(b) は E_x, B_y の関数形によらず満たされる。以下の問いに答えよ。

問１　式 (c) を，$E_x, B_y, \partial/\partial t, \partial/\partial z$ を用いて表せ。

問２　式 (d) を，$E_x, B_y, \partial/\partial t, \partial/\partial z$ を用いて表せ。

問３　問１，問２で得られた式から B_y を消去して E_x の２階偏微分方程式を導け。

問４　f は任意の２階微分可能な関数とする。$E_x(z,t) = f(z - ct)$ が問３で得られた方程式の解であるとき，正の定数 c を求めよ。また，定数 c の物理的な意味を述べよ。

問５　$E_x(z,t) = \cos(kz)\sin(\omega t)$ が問３で得られた方程式の解であるとき，正の定数 ω を c と正の定数 k とで表せ。

VII

電子のスピン角運動量の２個の状態を $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応させる。このときスピン角運動量の演算子は以下の３個の行列で表せる。

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ここで $\hbar$ は換算プランク定数，i は虚数単位を表す。以下の問１-問７に答えよ。

問１　z 成分 S_z の固有ベクトルが状態 $\chi_\uparrow$ 及び $\chi_\downarrow$ となることを示し，対応する固有値を求めよ。

問２　x 成分 S_x の固有値及び固有ベクトルを求め，規格化された固有ベクトルを状態 $\chi_\uparrow$ 及び $\chi_\downarrow$ を用いて表せ。

問３　電子のスピン角運動量の x 成分を測定した結果 $\hbar/2$ となった。続けて z 成分を測定すると $\hbar/2$ となる確率を求めよ。

問４　S_x と S_y の交換関係 $[S_x, S_y]$ を計算せよ。ただし，行列 A と B の交換関係は $[A, B] = AB - BA$ で表される。

問５　$\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ である。$\boldsymbol{S}^2$ を求めよ。

問６　$\boldsymbol{S}^2$ と S_z の交換関係 $[\boldsymbol{S}^2, S_z]$ を計算せよ。

問７　ハミルトニアン $H = -aS_z$ で表される系を考える。ここで，a は正の定数である。状態 $\chi_\uparrow$ と $\chi_\downarrow$ のエネルギー準位をそれぞれ求めよ。

VIII

3 次元の容器のなかに温度 T の熱平衡状態にある気体が閉じ込められている。気体は質量 m の単原子分子からなり，分子の速度は直交座標系で $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ と表され，以下の分布関数に従っている。

$$f(\boldsymbol{v}) = C\exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_{\rm B}T}\right\} = C\exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2k_{\rm B}T}\right\}\exp\left\{-\frac{mv_y^2}{2k_{\rm B}T}\right\}\exp\left\{-\frac{mv_z^2}{2k_{\rm B}T}\right\}.$$

C は定数，$k_{\rm B}$ はボルツマン定数である。ここで，$v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ である。必要に応じて次の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \qquad \int_{0}^{\infty} x^3e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^2}$$

を用いてよい。ただし，$a > 0$ である。

問１　速度分布関数の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{v})dv_xdv_ydv_z = 1$$

を用いて定数 C を求めよ。

問２　速度の平均 $\langle\boldsymbol{v}\rangle$ を求めよ。

問３　速度の二乗平均 $\langle v^2\rangle$ を求めよ。

問４　速さ $v = \sqrt{v^2}$ の平均 $\langle v\rangle$ を求めよ。速度空間を極座標を用いて表すと，

$$dv_xdv_ydv_z = v^2\sin\theta dvd\theta d\phi$$

となることを用いてよい。ただし，θ は v_z 軸と $\boldsymbol{v}$ のなす角，ϕ は $\boldsymbol{v}$ の v_xv_y 平面上への正射影が v_x 軸となす角である。

問５　速さの分布関数 $F(v)$ を用いると，速さの平均は次のように書くことができる。

$$\langle v\rangle = \int_{0}^{\infty} vF(v)dv.$$

$F(v)$ を求めよ。

問６　分布関数 $F(v)$ の最大を与える速さ v を求めよ。

IX

1 変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の零点，すなわち $f(x_*) = 0$ なる x_* の近似値を計算するための手法としてニュートン法がある。そのアルゴリズムは以下の通りである。

(1) 初期値 x_0 を与える。

(2) $n = 1, 2, \ldots$ に対して，x_{n-1} から x_n を次の漸化式により計算する。

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$f(x) = x^2 - 2$ に対して，$x_0 = 1$ としたときにニュートン法を実行するプログラムを Fortran または C 言語を使用して書け。ただし，$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-8}$ が成立したときにニュートン法の反復を停止し，最後に得られた x_n を出力するようにせよ。

X

x の 3 次多項式 $E_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ は以下のように書き換えられる。

$$E_3 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x*x}{1*2} + \frac{x*x*x}{1*2*3} = 1 + \frac{x}{\boxed{\text{(a)}}} * \left(1 + \frac{x}{\boxed{\text{(b)}}} * \left(1 + \frac{x}{\boxed{\text{(c)}}} * 1\right)\right).$$

ただし，$*$ は乗算を表すものとする。よって，計算手順 ($:=$ は代入を表す)

$$\begin{aligned} s &:= 1 \\ s &:= 1 + \frac{x}{\boxed{\text{(d)}}} * s \\ s &:= 1 + \frac{x}{\boxed{\text{(e)}}} * s \\ s &:= 1 + \frac{x}{\boxed{\text{(f)}}} * s \end{aligned}$$

により得られる最終的な s の値は，E_3 の値となる。同じようにこの考え方は x の n 次多項式 $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ にも適用でき，計算手順「s に 1 を代入する。自然数 k に対して $k = \boxed{\text{(g)}}$ から $k = 1$ まで計算『$s := 1 + \frac{x}{\boxed{\text{(h)}}} * s$』を繰り返し行う。」により得られる最終的な s の値は，E_n の値となる。以下の問いに答えよ。

問１　空欄 (a),(b),(c),(d),(e),(f) にあてはまる整数を，空欄 (g),(h) にあてはまる変数名または式を答えよ。

問２　実数 x と自然数 n を標準入力から読み込み，上記の計算手順に従って E_n を計算し，その値を標準出力に書き出すプログラムのソースコードを C 言語または Fortran で作成せよ。