解答 I

問１

$$f'(x) = \frac{-1}{x(1+\log x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{3+\log x}{x^2(1+\log x)^3}$$

であるので，$f(x)$ の $x=1$ における 2 次の項までのテイラー展開は次になる。

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1-(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2$$
$$\left(= \frac{7}{2} - 4x + \frac{3}{2}x^2\right)$$

問２ $x = \sin y$ を代入して，部分積分法により計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\cos y\, dy \\ &= \Big[\, y \sin y \,\Big]_0^{\pi/6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin y\, dy \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

問３ $\varepsilon > 0$ を十分小さく取ると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\ &= \Big[-\log|\cos x| \,\Big]_0^{\pi/2-\varepsilon} \\ &= -\log\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|\end{aligned}$$

を得る。よって，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\log\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|\right\} = \infty$$

となり，与えられた広義積分は発散する，つまり収束しないことがわかる。

解答 II

問１　2 つの解法をあげる。

解法 1. $x^2-y=(1-y^2)-y=-(y+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$ より，$(x,\,y)=(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\,-\frac{1}{2})$ で最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。

解法 2. 条件 $x^2+y^2=1$ から $y=\sqrt{1-x^2}$，または $y=-\sqrt{1-x^2}$ である。

$$F_+(x)=x^2-(-\sqrt{1-x^2})=x^2+\sqrt{1-x^2},$$
$$F_-(x)=x^2-\sqrt{1-x^2}$$

とおき，$F_+(x)$，$F_-(x)$ の最大値を $x\in[-1,\,1]$ で探せばよい。$F_+(x)\geq F_-(x)$ から，

$$F(x)=F_+(x)=x^2+\sqrt{1-x^2}$$

のみ考えればよいことがわかる。このとき，$F(x)$ が最大値をとる可能性があるのは $x=\pm1$，または

$$0=F'(x)=x\Big(2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$$
$$\Longrightarrow\ x=0 \text{ または } x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

である。$F(\pm1)=1$，　$F\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{5}{4}$，　$F(0)=1$ だから，$y=-\sqrt{1-x^2}$ に注意して，$(x,\,y)=(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\,-\frac{1}{2})$ で最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。

問２　考えている和集合は,

$$V=\big\{(x,\,y,\,z)\mid -1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1,\ z^2\leq\max\{1-x^2,\,1-y^2\}\big\}$$

である。対称性を用いて，V の体積は次のように求められる。

$$\begin{aligned}16\int_0^1\int_x^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dzdydx &= 16\int_0^1\int_x^1\sqrt{1-x^2}\,dydx\\ &= 16\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx-16\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx\\ &= 16\frac{\pi}{4}-8\int_0^1\sqrt{1-u}\,du\\ &= 4\pi-\frac{16}{3}\end{aligned}$$

解答 III

問１ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2-a \\ 0 & 1 & 2 & a-1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ を行基本変形すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ が得られる。よって，与えられた連立 1 次方程式が解をもつ条件は $a=0$ である。このとき，解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる。

問２ 第 1 列で展開すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 10 + (-2) \cdot 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

問３ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

$$|tI - A| = t(t-1)^2$$

より，固有値は 0 (重複度 1)，1 (重複度 2) である。固有値 0 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，固有値 1 に対する線形独立な固有ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれて，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすることができる。

解答 IV

問１ $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

問２ 行列 A を行に関して基本変形すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られるので，A の階数は 2 である。

問３ $\mathrm{Im}\, f$ の次元は A の階数に等しいので $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ である。さらに

$$\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 2 = 1$$

である。

問４ $\mathrm{Im}\, f$ は A の列ベクトルで生成される。$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立であり, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ であるので, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底となる。$\mathrm{Ker}\, f$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，基底 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。

問５ $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ より $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$，つまり $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\, f$ である。よって，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ となる。

解答 V

問１　問題文で与えられている一般解の２階微分は,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

である。これと一般解を運動方程式に代入することにより，$\omega = \sqrt{k/m}$ と求まる。

問２　初期条件より，$A = x_0, B = 0$ と求まる。

問３　初期条件を満たす特解は,

$$x(t) = x_0\cos\omega t$$

である。初めて変位が 0 になるのは，$\omega t_1 = \pi/2$ の時である。

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

問４　$v(t) = -x_0\omega\sin\omega t$ より，

$$v(t_1) = -x_0\omega = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

問５　解 $e^{-\lambda t}$ と，その時間微分

$$\left(e^{-\lambda t}\right)' = -\lambda e^{-\lambda t}, \quad \left(e^{-\lambda t}\right)'' = \lambda^2 e^{-\lambda t}$$

を運動方程式に代入すると，特性方程式

$$\lambda^2 - \gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

が得られる。問題文に与えられている関係式より，この方程式は重解を持つ。答えは $\lambda = \gamma/2$ となる。

問６　問題文に与えられている $x(t)$ と，その時間微分

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (D - \lambda C - \lambda Dt)e^{-\lambda t}$$

に初期条件を適用すると,

$$C = x_0, \quad D = \lambda x_0 = \frac{x_0\gamma}{2}$$

と求まる。

解答 VI

問１ $\left(0, \dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}, 0\right) = \left(0, -\dfrac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}, 0\right)$, あるいは，$\dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}$.

問２ $\dfrac{1}{\mu_0}\left(-\dfrac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}, 0, 0\right) = \epsilon_0\left(\dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}, 0, 0\right)$, あるいは，$-\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = \epsilon_0\dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}$.

問３ $\dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}$.

問４ 問３で得られた式に与式を代入すると $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$ が得られる。$E_x(z,t) = f(z-ct)$ は形を変えずに速さ c で z 方向に伝搬する電場を表している。よって，$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ は電磁波が真空中を進む速さ，すなわち真空中の光速である。

問５ 問３，問４で得られた式 $\dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = 0$ に与式を代入すると $\omega^2 = c^2k^2$ が得られる。すなわち $\omega = ck$.

解答 VII

問１ $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\chi_\uparrow = \frac{\hbar}{2}\chi_\uparrow$, $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\chi_\downarrow = -\frac{\hbar}{2}\chi_\downarrow$.　このことより $\chi_\uparrow$ 及び $\chi_\downarrow$ が固有ベクトルとなり，固有値は $\frac{\hbar}{2}$ 及び $-\frac{\hbar}{2}$ となる。

問２ $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.　このことから固有値は $\frac{\hbar}{2}$ 及び $-\frac{\hbar}{2}$ となり, 規格化された固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 及び $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。従って $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow + \chi_\downarrow)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow - \chi_\downarrow)$.

問３ S_x を測定した結果，固有値が $\hbar/2$ となったのでその状態は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。この状態は $\chi_\uparrow$ と $\chi_\downarrow$ の重ね合わせである。次に S_z を測定すると等確率で固有値 $\frac{\hbar}{2}$ 及び $-\frac{\hbar}{2}$ を測定し得る。従って確率は 1/2 である。

問４ $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$.

問５ $\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問６ $[\boldsymbol{S}^2, S_z] = 0$.

問７ $H\chi_\uparrow = -\frac{a\hbar}{2}\chi_\uparrow$.　$H\chi_\downarrow = \frac{a\hbar}{2}\chi_\downarrow$.　この結果からエネルギー準位は $-\frac{a\hbar}{2}$ 及び $\frac{a\hbar}{2}$ となる。

解答 VIII

問１　問題文に与えられている公式を用いて，

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{\frac{3}{2}}$$

と求まる。

問２　速度ベクトルの成分 v_x, v_y, v_z の分布関数はそれぞれ偶関数なので，

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = (\langle v_x \rangle, \langle v_y \rangle, \langle v_z \rangle) = (0, 0, 0).$$

問３　問題文に与えられている公式を用いて，

$$\langle \boldsymbol{v}^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_x^2 \rangle = \frac{3k_{\mathrm{B}}T}{m}.$$

問４　速度空間を極座標を用いて表すと，平均は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v f(\boldsymbol{v}) dv_x dv_y dv_z \\
&= \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\infty} v e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}} v^2 \sin\theta dv \right) d\theta \right) d\phi \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}} dv = \sqrt{\frac{8k_{\mathrm{B}}T}{\pi m}}.
\end{aligned}$$

問５　問４の解答例にある角度 θ, ϕ に関する積分を実行後の，v で表された平均の式より，

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}}.$$

問６　$dF/dv = 0$ より，最大を与える速さは $\sqrt{\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}}$.

解答 IX

解答例として，C 言語によるプログラムの例を挙げる。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double x) {
  return x*x - 2.0;
}

double df(double x) {
  return 2.0*x;
}

int main(void) {
  double x, xold, err;

  xold = 1.0;

  do {
    x = xold - f(xold)/df(xold);
    err = fabs(x - xold);
    xold = x;
  } while (err >= 1E-8);

  printf("x = %f\n", x);

  return 0;
}
```

解答 X

問１ (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 3, (e) 2, (f) 1.
(g) n, (h) k.

問２ C 言語によるプログラム例

```
#include <stdio.h>
int main()
{
  int n, k;
  double x, s;
  printf("input real number x: "); scanf("%lf", &x);
  printf("input natural number n: "); scanf("%d", &n);
  s = 1.0;
  for (k = n; k >= 1; k--)
    s = 1.0 + (x/k)*s;
  printf("%g\n", s);
  return 0;
}
```