| 令和5年度（10月期）及び令和6年度　金沢大学大学院自然科学研究科<br>**博士前期課程入学試験** | |
|---|---|
| 専　攻　名 | 数物科学専攻（物理学コース）<br>（一般選抜・外国人留学生特別選抜） |
| 試験科目名 | 専門科目　　物理学 |
| | 問題は４問であり，全ての問題に解答してください。 |
| 問題用紙等枚数 | 問題用紙　　計　7　枚（この表紙は含まない）<br>答案用紙　　計　4　枚<br>下書き用紙　計　4　枚 |
| 試　験　日　程 | 令和５年８月２２日（火）実施 |

〔全般的な解答に際しての注意事項〕

・試験開始直後に，問題用紙等が上記指定の枚数のとおりあるか確認してください。

・すべての答案用紙に「志願専攻」及び「受験番号」を記入してください。なお，自分の氏名はどこにも書いてはいけません（書いた場合は，不正行為とみなします）。

・問題用紙・下書き用紙は，各自持ち帰っても差し支えありません。

〔専攻別注意事項〕

・１問につき１枚の答案用紙で解答し，答案用紙には問題番号を明記すること。

・必要であれば答案用紙の裏面を使っても良い。ただし，「裏に続く」と明記すること。また，裏面においても上から約 8cm の部分（表面の受験番号等記入欄に対応する部分）は解答に使用しないこと。

# I

長さ $D$, 質量 $m$, 一様な密度をもつ同じ 2 本の棒と質量を無視できるバネ（バネ定数 $k$, 自然長 $\ell$）が図 1 のように連結されている。2 本の棒の上端は座標 $(x=0, y=0)$ の点 O に固定されており，棒は点 O のまわりに滑らかに動くことができる。$y$ 軸は鉛直上向きで定義され，鉛直下向き方向とそれぞれの棒のなす角度を $\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とし，2 本の棒は $y$ 軸に対して常に対称に動くとする。バネはたわまず，棒とバネは $xy$ 平面上で運動するものとする。重力加速度の大きさを $g$，重力ポテンシャルエネルギーの基準を点 O とする。棒の太さは無視できるとし，以下の問いに答えなさい。

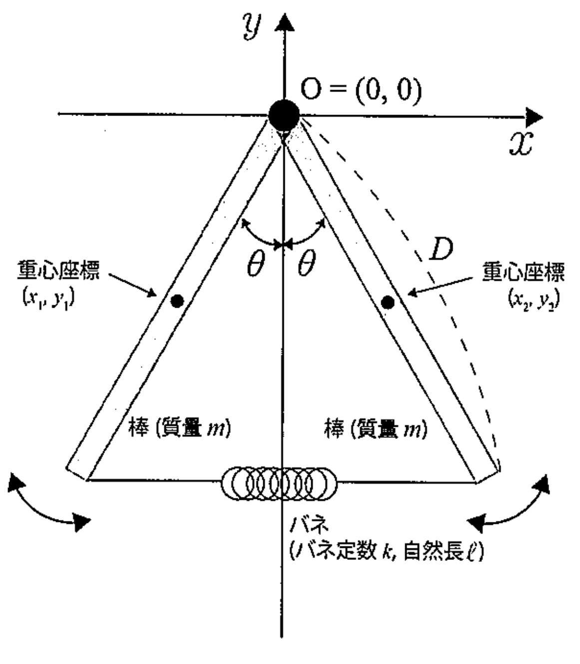


図 1

問 1　片方の棒の重心座標 $(x_1, y_1)$ は $\left(-\dfrac{D}{2}\sin\theta, -\dfrac{D}{2}\cos\theta\right)$ で与えられる。このとき，もう片方の棒の重心座標 $(x_2, y_2)$ を $D, \theta$ を用いて表しなさい。

問 2　問 1 で求めた 2 つの棒の $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2$ を $D, \theta, \dot{\theta}$ のうちから必要なものを用いて，それぞれ表しなさい。ただし，$\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}, \dot{y}_i = \dfrac{dy_i}{dt}, \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ とする $(i=1,2)$。

問 3　2 つの棒の運動エネルギー $T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ を $m, D, \theta, \dot{\theta}$ のうちから必要なものを用いて表しなさい。

問 4　2 つの棒の重力ポテンシャルエネルギーの和 $U_1$ を $m, D, \theta, g$ のうちから必要なものを用いて表しなさい。

問５ バネのポテンシャルエネルギー $U_2$ を $k, D, \ell, \theta, \dot{\theta}$ のうちから必要なものを用いて表しなさい。

問６ 問３，問４および問５の答えを用いて，この系のラグランジアンを求めなさい。

問７ 問６で求めたラグランジアンを用いて，$\theta$ についての運動方程式を求めなさい。

問８ $\theta$ がじゅうぶんに小さいとき ($|\theta| \ll 1$ とし，$\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1$ と近似できるとき)，$\theta$ についての運動方程式を求めなさい。ここで，$\dfrac{\ell}{D}\cos\theta \simeq \dfrac{\ell}{D}$ とする。

問９ 問８で求めた運動方程式を用いて，系がつりあったときの $\theta$ を求めなさい。ただし，$\theta$ は $m, g, k, D, \ell$ を用いて表すこと。

問 10 問８および問９の答えから，この系はつりあいの位置のまわりで微小振動することがわかる。この微小振動の角振動数を求めなさい。

# II

オームの法則を微視的な視点から捉えるために，乾電池につながれた金属導線中を運動する電子を考える。電子は乾電池による電場 $E$ による力と，金属内での抵抗力を受けながら運動をする。電子の電荷を $-q$, 電子の質量を $m$, 電場を $E$, 磁束密度を $B$, 電荷密度を $\rho$, 電流密度を $j$, 真空の誘電率を $\varepsilon_0$, 真空の透磁率を $\mu_0$ とする。以下の問いに答えなさい。

それぞれの問いにおいて，以下のマクスウェル方程式を必要に応じて用いてよい。

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t},\quad \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t},\quad \nabla \cdot B = 0$$

問 1　電子が金属導線中を電場 $E$ による力と，電子の速度 $v$ に比例した抵抗力 $-kv$ を受けながら運動するとして，電子の運動方程式を答えなさい。

問 2　定常状態 $\dfrac{dv}{dt} = 0$ における電子の速度を求めなさい。

問 3　金属中の電子数密度を $n$ として，定常状態における電気伝導度（電気抵抗率の逆数）$\sigma$ を $n, q, k$ を用いて表しなさい。なお，オームの法則は $j = \sigma E$ と表されることを用いてよい。

電気抵抗がゼロである超伝導体内部では，抵抗力を受けない電子が電気伝導を担うと考えることができる。超伝導体の誘電率と透磁率は真空中と同じとして，以下の問いに答えなさい。

問 4　超伝導体内部で電子が全く散乱されないとすると，電流密度 $j$ と電場 $E$ との間に次の関係が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{nq^2}{m} E \tag{2.1}$$

問 5　式 (2.1) の両辺の回転 (rotation) を計算し，マクスウェル方程式と組み合わせることで，以下の式が導かれることを示しなさい。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times j + \frac{nq^2}{m} B\right) = 0 \tag{2.2}$$

問 6　超伝導の場合には，式 (2.2) のカッコ内はゼロベクトルである。このとき定常状態 $\dfrac{\partial E}{\partial t} = 0$ であるとしてマクスウェル方程式を用い，$B$ に関する以下の微分方程式を導きなさい。

$$\nabla^2 B = \frac{\mu_0 n q^2}{m} B \tag{2.3}$$

必要ならば，次の関係式を証明せずに用いてよい。

$$\nabla \times \nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B$$

問 7　式 (2.3) を用いると超伝導体内部には磁場が侵入しないというマイスナー効果 (超伝導体の磁気浮上に関係) を説明できる。図 2 のように $x \geq 0$ の領域が半無限の超伝導体で占められ，$x < 0$ の領域は真空であるとする。一様な外部磁場 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = (0, 0, B_0)$ が $z$ 軸に平行に印加されている状況を考える。超伝導体内部の磁束密度を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, B_z(x))$ とすると，超伝導体のじゅうぶん内部 ($x \to \infty$) では $B_z(x) \to 0$ であり，超伝導体と真空の境界では $B_z(0) = B_0$ を満たすとする。長さの次元をもつ $\sqrt{\dfrac{m}{\mu_0 n q^2}}$ を $\lambda$ (磁場侵入長) として，式 (2.3) の微分方程式を解きなさい。また，得られた解を用いて超伝導体内部における $B_z$ の $x$ 依存性を図 3 にならって図示しなさい。なお，$x = \lambda$ における $B_z(x)$ の値を図に明記すること。

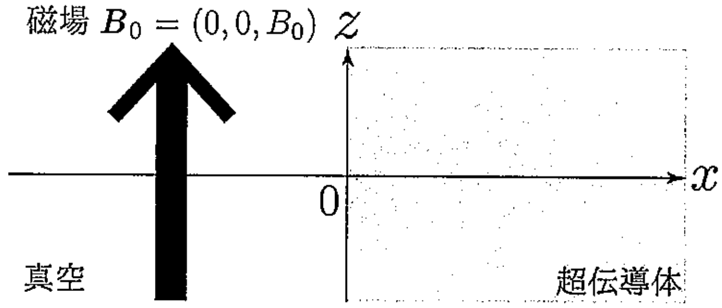


図 2

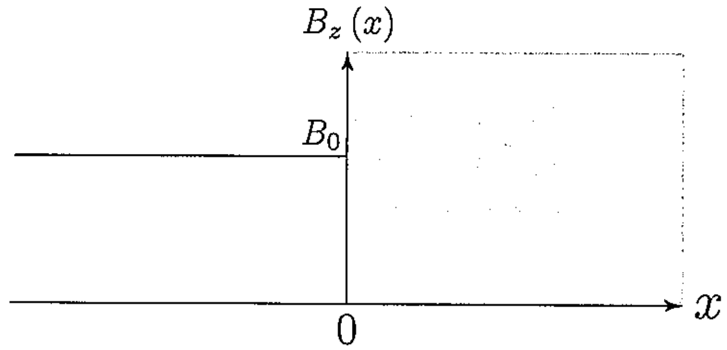


図 3

問 8　問 7 で得られた微分方程式の解と定常状態 $\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$ におけるマクスウェル方程式から，磁場によって超伝導体表面に生じた電流の電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = (j_x(x), j_y(x), j_z(x))$ を求めなさい。また，電流は磁場に対してどの方向に生じているか述べなさい。

問 9　磁場侵入長の値を真空の透磁率 $\mu_0 = 1.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N/A^2}$，電気素量 $q = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$，電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$，電子数密度 $n = 6.0 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$(アルミニウムに対応) を用いて有効数字 1 桁で答えなさい。

# III

絶対温度 $T$, 圧力 $p$ 下で平衡状態にある物質量 $N$ の系において，系内の物質の相変化を考える。この系は単成分であり，$N$ の増減はなく，液相と固相の化学ポテンシャルをそれぞれ $\mu_{\mathrm{L}}(T,p)$ と $\mu_{\mathrm{S}}(T,p)$ とする。すべての過程は準静的に起こるとして以下の問いに答えなさい。

問 1　ギブスの自由エネルギー $G$ と化学ポテンシャル $\mu$ は関係式 $G=\mu N$ を満たす。また，ギブスの自由エネルギー変化の一次微分は $dG=-SdT+Vdp+\mu dN$ のように表される。ここで，$S$ はエントロピー，$V$ は体積である。これらの関係式より，化学ポテンシャルの微小変化 $d\mu$ を $S, T, V, p, N$ を用いて表しなさい。

問 2　化学ポテンシャル $\mu(T,p)$ はどのような関数か。次の選択肢から正しいものを選びなさい。
(a) 示量性の関数，(b) 示強性の関数

問 3　ある圧力 $p$, 温度 $T$ の下で液相と固相の共存状態であった系において，圧力を $p$ に保ったまま温度を $T_{\mathrm{L}}$ に変化させた。すると，やがて系内の物質はすべて固体になった。このとき，$T_{\mathrm{L}}$ における液相の化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{L}},p)$ と固相の化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{L}},p)$ の大小関係について，次の選択肢から正しいものを選びなさい。
(a) $\mu_{\mathrm{L}}>\mu_{\mathrm{S}}$，(b) $\mu_{\mathrm{L}}<\mu_{\mathrm{S}}$

次に，固体となった系に，圧力 $p$ のまま熱 $Q$ を与え加熱すると，系は図 4 のような温度変化を示した。

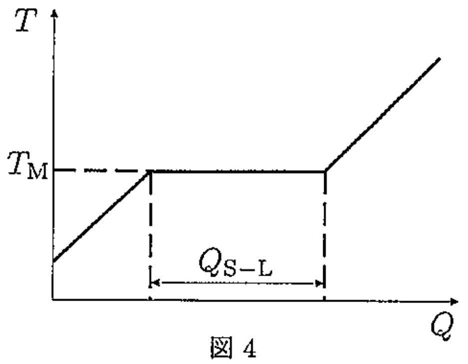


図 4

問 4　固体の融解温度 $T_{\mathrm{M}}$ 下で固体を完全に融解させるときに加えられた熱 $Q_{\mathrm{S-L}}$ を，$T_{\mathrm{M}}$ においてすべて液相のときのエントロピー $S_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}},p)$, すべて固相のときのエントロピー $S_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{M}},p)$, $T_{\mathrm{M}}$ を用いて表しなさい。

問 5　ギブスの自由エネルギー $G$ はエンタルピー $H$ を用いて $G=H-TS$ のように表される。$T_{\mathrm{M}}, p$ における液相の化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}},p)$ を液相のエンタルピー $H_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}},p)$, $S_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}},p)$, $N$, $T_{\mathrm{M}}$ を用いて表しなさい。

問 6　$T_{\mathrm{M}}, p$ における $\mu_{\mathrm{L}}$ と $\mu_{\mathrm{S}}$ の関係について，次の選択肢から正しいものを選びなさい。
(a) $\mu_{\mathrm{L}}<\mu_{\mathrm{S}}$, (b) $\mu_{\mathrm{L}}=\mu_{\mathrm{S}}$, (c) $\mu_{\mathrm{L}}>\mu_{\mathrm{S}}$

問 7　$T_{\mathrm{M}}, p$ における液相と固相の単位物質量あたりのエンタルピーの差を $\Delta h$, エントロピーの差を $\Delta s$ とする。問 6 で求めた化学ポテンシャルの関係を用いて $T_{\mathrm{M}}$, $\Delta h$, $\Delta s$ の関係を表しなさい。

次に，図 5 のような A 相と B 相が共存している系の共存曲線を考える。以下の問いに答えなさい。

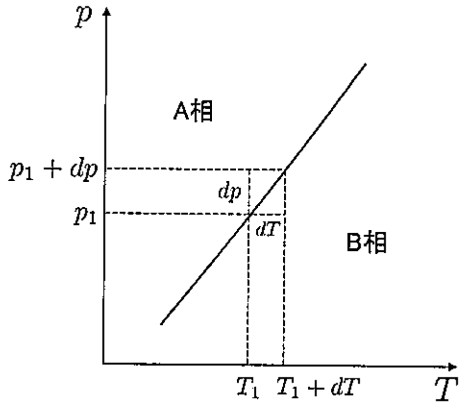


図 5

問 8　ギブスの自由エネルギーを $G(T, p, N)$ として，共存曲線上の点 $(T_1, p_1)$ における A 相と B 相のギブスの自由エネルギー $G_{\mathrm{A}}(T_1, p_1, N)$ と $G_{\mathrm{B}}(T_1, p_1, N)$ の関係について，次の選択肢から正しいものを選びなさい。

(a) $G_{\mathrm{A}} > G_{\mathrm{B}}$, (b) $G_{\mathrm{A}} = G_{\mathrm{B}}$, (c) $G_{\mathrm{A}} < G_{\mathrm{B}}$

問 9　共存曲線上の点 $(p_1 + dp, T_1 + dT, N)$ において A 相から B 相へ変化したときのエントロピーの差 $\Delta S^*_{\mathrm{A\to B}} = S^*_{\mathrm{B}} - S^*_{\mathrm{A}}$，体積の差 $\Delta V^*_{\mathrm{A\to B}} = V^*_{\mathrm{B}} - V^*_{\mathrm{A}}$ を用いて，下式の右辺を表しなさい。ここで，$S^*_{\mathrm{A}} = S_{\mathrm{A}}(T_1 + dT, p_1 + dp, N)$, $S^*_{\mathrm{B}} = S_{\mathrm{B}}(T_1 + dT, p_1 + dp, N)$, $V^*_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}}(T_1 + dT, p_1 + dp, N)$, $V^*_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{B}}(T_1 + dT, p_1 + dp, N)$ である。

$$\frac{dp}{dT} = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$$

問 10　問 9 で求めた式は，共存曲線上のある点の接線の傾きとなる $p(T)$ の微分係数 $\dfrac{dp}{dT}$ を表す。問 7 の結果を利用して，共存曲線上の点 $(T, p)$ における A 相と B 相の体積の差 $\Delta V_{\mathrm{A\to B}}$，エンタルピーの差 $\Delta h_{\mathrm{A\to B}}$, $T$, $N$ を用いて下式の右辺を表しなさい。

$$\frac{dp}{dT} = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$$

問 11　問 10 で求めた式を用い，気圧 $7.34 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$ の山頂で水が沸騰する温度は 1 気圧下と比べてどの程度下がるか有効数字 2 桁で見積もりなさい。なお，1 気圧 $1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$，1 気圧下での水の気化熱を $2.260 \times 10^3\,\mathrm{J/g}$，水の分子量を 18，1 モルの水が気化するときの体積変化を温度によらず $3.06 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}$ とする。

# IV

1 次元ポテンシャル $V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ の下で運動する 1 粒子の系を考える。粒子の位置演算子，運動量演算子をそれぞれ $\hat{x}, \hat{p}$ とおくと，これらは交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ を満たす。ここで $m$ は粒子の質量，$\omega$ は角振動数，$\hbar$ はプランク定数 $h$ を $2\pi$ で割った定数である。以下の問いに答えなさい。

問 1　系のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を $\hat{x}, \hat{p}, m, \omega$ を用いて表しなさい。

問 2　以下の交換関係を求めなさい。

(1)　$[\hat{x},\hat{H}]$　　　　(2)　$[\hat{p},\hat{H}]$

問 3　ハイゼンベルク描像において，任意の演算子 $\hat{O}(t)$ の時間発展はハイゼンベルク方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{O}(t)=[\hat{O}(t),\hat{H}]$$

で与えられる。問 2 の結果を用いて，$\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ に対するハイゼンベルク方程式を書きなさい。

問 4　ハイゼンベルク描像において，演算子 $\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)$ を以下のように定義する。

$$\hat{a}(t)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}(t)+\frac{i}{m\omega}\hat{p}(t)\right)$$
$$\hat{a}^\dagger(t)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}(t)-\frac{i}{m\omega}\hat{p}(t)\right)$$

$\dfrac{d}{dt}\hat{a}(t)$ と $\dfrac{d}{dt}\hat{a}^\dagger(t)$ を $\omega, \hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)$ の中から必要なものを用いて表しなさい。

問 5　問 4 で得られた方程式を解き，$\hat{a}(t)$ と $\hat{a}^\dagger(t)$ を $\hat{a}(0), \hat{a}^\dagger(0)$ を用いて表しなさい。

以下では，簡単のため $\hat{a}_0=\hat{a}(0)$, $\hat{a}_0^\dagger=\hat{a}^\dagger(0)$ とおく。$|0\rangle$ を $\hat{a}_0|0\rangle=0$ を満たす状態，$|1\rangle$ を $|1\rangle=a_0^\dagger|0\rangle$ により与えられる状態として定義し，これらの線形結合から構成される状態

$$|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$$

を考える。ただし，$a, b$ は複素数の定数であり，$|\psi\rangle, |0\rangle, |1\rangle$ は規格化されている，すなわち $\langle\psi|\psi\rangle=\langle 0|0\rangle=\langle 1|1\rangle=1$ を満たすものとする。以下の問いに答えなさい。必要ならば，$\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger$ が次の関係を満たすことを証明せずに用いてよい。

$$[\hat{a}_0,\hat{a}_0]=[\hat{a}_0^\dagger,\hat{a}_0^\dagger]=0,\quad [\hat{a}_0,\hat{a}_0^\dagger]=1$$

問 6　期待値 $\langle\psi|\hat{x}(0)|\psi\rangle$ を計算しなさい。

問 7　問 6 で求めた期待値を最大にする $a, b$ の値を求めなさい。

問 8　問 7 で求めた係数 $a, b$ をもつ $|\psi\rangle$ に対し，以下の期待値を求めなさい。

(1)　$\langle\psi|\hat{x}(t)|\psi\rangle$　　　　(2)　$\langle\psi|\hat{p}(t)|\psi\rangle$

問 9　問 7 で求めた係数 $a, b$ をもつ $|\psi\rangle$ に対し，時刻 $t$ における位置のゆらぎ $\langle\psi|(\Delta\hat{x}(t))^2|\psi\rangle$ を求めなさい。ただし $\Delta\hat{x}(t)=\hat{x}(t)-\langle\psi|\hat{x}(t)|\psi\rangle$ とおく。