令和 5 年度 (10 月期入学) 及び令和 6 年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例		
専攻名	数物科学専攻（物理学コース）（一般選抜・外国人留学生特別選抜）	
試験科目名	専門科目　　物理学	P.　1／5

I

問 1

$$(x_2, y_2) = (+\frac{D}{2}\sin\theta, -\frac{D}{2}\cos\theta)$$

問 2

$$(\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (-\frac{D}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta}, +\frac{D}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta})$$
$$(\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (+\frac{D}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta}, +\frac{D}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta})$$

問 3

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m\frac{D^2\dot{\theta}^2}{2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{mD^2\dot{\theta}^2}{4}$$

問 4

$$U_1 = -mg\frac{D}{2}\cos\theta - mg\frac{D}{2}\cos\theta = -mgD\cos\theta$$

問 5

$$U_2 = \frac{k}{2}(2D\sin\theta - \ell)^2 = 2kD^2\sin^2\theta - 2kD\ell\sin\theta + \frac{k}{2}l^2$$

問 6

$$L = T - U_1 - U_2 = \frac{mD^2\dot{\theta}^2}{4} + mgD\cos\theta - 2kD^2\sin^2\theta + 2kD\ell\sin\theta - \frac{k}{2}l^2$$

問 7 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0$ を使う。

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -mgD\sin\theta - 4kD^2\sin\theta\cos\theta + 2kD\ell\cos\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mD^2\dot{\theta}\right) = \frac{1}{2}mD^2\ddot{\theta}$$

$$\to \ddot{\theta} = -\frac{2g}{D}\sin\theta - \frac{8k}{m}\sin\theta\cos\theta + \frac{4k\ell}{mD}\cos\theta$$

問 8 $\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1$ より

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{D}\theta - \frac{8k}{m}\theta + \frac{4k\ell}{mD} = -\left(\frac{2mg + 8kD}{mD}\right)\left(\theta - \frac{2k\ell}{mg + 4kD}\right)$$

いずれの表式でも正解とする。

問 9 系がつりあったとき $\ddot{\theta} = 0$ となる。このときの θ を θ_0 とし，問 8 の答えを用いると

$$\theta_0 = \frac{2k\ell}{mg + 4kD}$$

問 10

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2mg+8kD}{mD}\right)\left(\theta - \frac{2k\ell}{mg+4kD}\right) = -\left(\frac{2mg+8kD}{mD}\right)(\theta-\theta_0)$$

$\theta - \theta_0 \to \theta'$ とすると，θ_0 は定数なので以下のように表すことができる。

$$\ddot{\theta}' = -\left(\frac{2mg+8kD}{mD}\right)\theta'$$

この単振動の式から角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{2mg+8kD}{mD}}$ となることがわかる。

II

問 1　$m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -q\boldsymbol{E} - k\boldsymbol{v}$

問 2　$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ が 0 となるので, $-q\boldsymbol{E} - k\boldsymbol{v} = 0$ である。よって，定常状態の電子の速度を $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{v}}$ とすれば, $\tilde{\boldsymbol{v}} = -\dfrac{q\boldsymbol{E}}{k}$

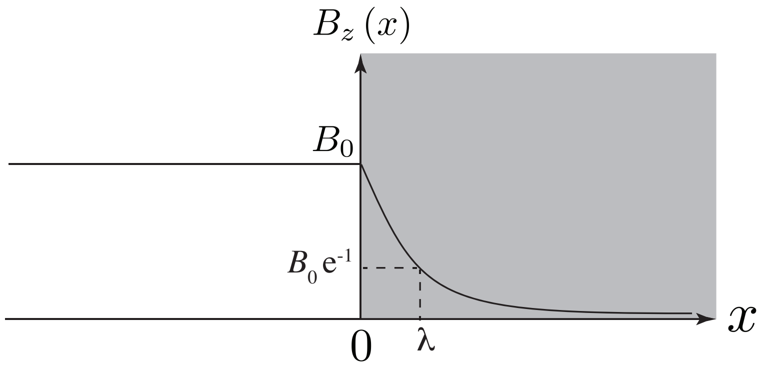
問 3　定常状態の電子の速度 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ を用いると，電流密度は $\boldsymbol{j} = -qn\tilde{\boldsymbol{v}}$ と表せる。ここに問 2 の結果 $\tilde{\boldsymbol{v}} = -\dfrac{q\boldsymbol{E}}{k}$ を代入して $\boldsymbol{j} = \dfrac{nq^2}{k}\boldsymbol{E}$ となる。よって $\sigma = \dfrac{nq^2}{k}$

問 4　抵抗を受けないことから, 電子の運動方程式は，$m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -q\boldsymbol{E}$ であり，$\boldsymbol{j} = -qn\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{v} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{qn}$ であるので，$\dfrac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \dfrac{nq^2}{m}\boldsymbol{E}$ が導かれる。

問 5　両辺の rotation をとると，$\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \dfrac{nq^2}{m}\nabla \times E$ であり，これと $\nabla \times E = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ から $\nabla \times \dfrac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \dfrac{nq^2}{m}\left(-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$ よって右辺を左辺に移項して $\dfrac{\partial}{\partial t}$ でまとめると，$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{j} + \dfrac{nq^2}{m}\boldsymbol{B}\right) = 0$ が得られる。

問 6　式 (2.2) のカッコ内が 0 であるとすると，$\nabla \times \boldsymbol{j} = -\dfrac{nq^2}{m}\boldsymbol{B}$ となる。$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ で，定常状態であるとすると，変位電流 $\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ は 0 となるので，$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ となる。この式の両辺の rotation をとって与えられた公式と組み合わせると，$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 nq^2}{m}\boldsymbol{B}$ が得られる。

問 7　$B_z(x) = B_0 \exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right)$



問 8　問 7 の答えと $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ から，$j_x(x) = j_z(x) = 0$, $j_y(x) = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial B_z(x)}{\partial x} = \dfrac{B_0}{\mu_0 \lambda}\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right)$ と求まる。また，電流は磁場と x 軸に垂直な方向（y 方向）に生じている。

問 9　$\lambda = 2 \times 10^{-8}$ m (20 nm)

III

問 1 問題文より，$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$
　また，$G = \mu N$ より，$dG = Nd\mu + \mu dN$
　上記 2 式より，$d\mu = \dfrac{-SdT + Vdp}{N}$

問 2 (b) 示強性の関数

問 3 (a) $\mu_{\mathrm{L}} > \mu_{\mathrm{S}}$

問 4 等温準静過程において，$dS = \dfrac{d'Q}{T}$
　よって，$Q_{\mathrm{S-L}} = T_{\mathrm{M}}(S_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}}, p) - S_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{M}}, p))$

問 5 $G = \mu N$，および $G = H - TS$ より，$\mu_{\mathrm{L}} = \dfrac{H_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}}, p) - T_{\mathrm{M}} S_{\mathrm{L}}(T_{\mathrm{M}}, p)}{N}$

問 6 融解温度では液相と固相が共存しているので，(b) ($\mu_{\mathrm{L}} = \mu_{\mathrm{S}}$)

問 7 問 5 の答えと問 4 の $\mu_{\mathrm{L}} = \mu_{\mathrm{S}}$ の関係を考えて，液相と固相の単位物質量あたりのエンタルピー差とエントロピー差を用いれば $T_{\mathrm{M}}\Delta s = \Delta h$ を得る。

問 8 A 相と B 相の共存曲線上では $G_{\mathrm{A}}(T_1, p_1, N) = G_{\mathrm{B}}(T_1, p_1, N)$ であり，(b) $G_{\mathrm{A}} = G_{\mathrm{B}}$

問 9 A 相内と B 相内での物質の増減がないことより，問 1 で与えた関係式 $dG = -SdT + Vdp + \mu dN$ において $dN = 0$ とすれば

$$dG = -SdT + Vdp \tag{A3.1}$$

　また問 8 より，共存曲線上の点では

$$G_{\mathrm{A}}(T_1, p_1, N) = G_{\mathrm{B}}(T_1, p_1, N) \tag{A3.2}$$

　式 (A3.1), (A3.2) より，共存曲線上では

$$-S^*_{\mathrm{A}} dT + V^*_{\mathrm{A}} dp = -S^*_{\mathrm{B}} dT + V^*_{\mathrm{B}} dp \tag{A3.3}$$

　題意より，$\Delta S^*_{\mathrm{A\to B}} = S^*_{\mathrm{B}} - S^*_{\mathrm{A}}$, $\Delta V^*_{\mathrm{A\to B}} = V^*_{\mathrm{B}} - V^*_{\mathrm{A}}$ なので，式 (A3.3) を書き換えて $\dfrac{dp}{dT} = \dfrac{\Delta S^*_{\mathrm{A\to B}}}{\Delta V^*_{\mathrm{A\to B}}}$

問 10 問 7 の答えを参考にして共存曲線上では，$T\Delta s = \Delta h$
　これをヒントに両辺に物質量 N をかければ，$\Delta S^*_{\mathrm{A\to B}} = \dfrac{N\Delta h_{\mathrm{A\to B}}}{T}$ が得られる。
　得られた関係を用いて，問 9 の答えを書き換えれば，$\dfrac{dp}{dT} = \dfrac{N\Delta h_{\mathrm{A\to B}}}{T\Delta V_{\mathrm{A\to B}}}$

問 11 共存曲線上の相変化に伴うエンタルピーの差を Δh と体積の差を ΔV として，
　$\dfrac{dT}{dp} = \dfrac{T\Delta V}{N\Delta h} = \dfrac{373 \times (3.06 \times 10^{-2})}{18 \times 2260} \simeq 2.8 \times 10^{-4}\,\mathrm{K/Pa}$
　$\Delta T \simeq \dfrac{dT}{dp} \times \Delta p$ として，$\Delta T \simeq 2.8 \times 10^{-4} \times (734 - 1013) \times 10^2 \simeq -7.8\,\mathrm{K}$

IV

問 1

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

問 2

$$(1)\quad [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar\hat{p}}{m} \qquad (2)\quad [\hat{p}, \hat{H}] = -i\hbar m\omega^2\hat{x}$$

問 3

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{\hat{p}(t)}{m}, \quad \frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -m\omega^2\hat{x}(t)$$

問 4

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega\hat{a}(t), \quad \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = i\omega\hat{a}^\dagger(t)$$

問 5

$$\hat{a}(t) = \exp(-i\omega t)\hat{a}(0), \quad \hat{a}^\dagger(t) = \exp(i\omega t)\hat{a}^\dagger(0)$$

問 6　$\hat{x}(0) = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)$, $\langle 0|(\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)|0\rangle = \langle 1|(\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger)|1\rangle = \langle 1|\hat{a}_0|0\rangle = \langle 0|\hat{a}_0^\dagger|1\rangle = 0$,
$\langle 0|\hat{a}_0|1\rangle = \langle 1|\hat{a}_0^\dagger|0\rangle = 1$ などを用いて

$$\langle\psi|\hat{x}(0)|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^*b + b^*a)$$

問 7　$|\psi\rangle$ は規格化されているので $|a|^2 + |b|^2 = 1$ であることに注意すると

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta} \quad \text{ただし}\theta\text{は実数}$$

（複素位相 $e^{i\theta}$ がないものも正解とする。）

問 8

$$(1)\quad \langle\psi|\hat{x}(t)|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \qquad (2)\quad \langle\psi|\hat{p}(t)|\psi\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

問 9　まず $\hat{x}(t)^2$ の期待値を求める。

$$\hat{x}(t)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\right)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(e^{-2i\omega t}\hat{a}_0\hat{a}_0 + e^{2i\omega t}\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0^\dagger + 2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 + 1\right)$$

と変形でき，右辺第 1 項と第 2 項の期待値はゼロになるため，

$$\langle\psi|\hat{x}(t)^2|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(2\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 + 1)(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot 2$$

を得る。したがって

$$\langle\psi|(\Delta\hat{x}(t))^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{x}(t)^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{x}(t)|\psi\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(2 - \cos^2(\omega t)\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 + \sin^2(\omega t)\right)$$