２０２３年度（１０月期）及び ２０２４年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程入学試験

数物科学専攻・数学コース

専門科目

（注　意）

1　問題冊子は指示があるまで開かないこと。

2　問題冊子は本文３ページ，答案用紙は４枚，下書き用紙は３枚である。

3　問題は全部で６問ある。その中から４問を選択して，１問につき１枚の答案用紙に解答せよ。その際，答案用紙の解答欄（横線の下）左上の［　］欄に解答する問題番号を記入すること。

4　解答はすべて答案用紙の解答欄に記入すること。答案用紙の裏を使ってもよいが，この場合は解答欄に裏を使うことを明記し，裏面においては上部（おもて面の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。

5　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること。

6　問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。

試験問題の本文は次のページから始まる。

次の問題 [1] ～ [6] の中から 4 問を選択して解答せよ。

[1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。

(2) A の各固有値 λ に対する固有空間 $W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ と広義固有空間

$$\widetilde{W}_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \text{ある } m \geq 1 \text{ に対して } (A - \lambda E)^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

を求めよ。ただし，E は 3 次の単位行列である。

(3) $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような 3 次の正則行列 P を一つ求めよ。

[2] 実数を成分にもつ 2 次正方行列のなす実ベクトル空間を V とする。V から V への写像 T_g を

$$T_g(X) = gXg^{-1}, \qquad g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める。次の問いに答えよ。

(1) T_g は V から V への線型写像であることを示せ。

(2) V の基底 $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する写像 T_g の表現行列を求めよ。

(3) $\mathrm{Ker}(T_g - \mathrm{Id}_V)$ と $\mathrm{Im}(T_g - \mathrm{Id}_V)$ の次元と一組の基底を求めよ。ただし，Id_V は V の恒等写像とする。

[3] 連続関数 $g : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ は

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4\,g(x) \qquad (x \in [0,1])$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) 任意の $x \in [0,1]$ について $4|g(x)| \leq \max_{y\in[0,1/2]} |g(y)| + \max_{y\in[1/2,1]} |g(y)|$ が成り立つことを示せ。

(2) $[0,1]$ 上における $|g(x)|$ の最大値は 0 であることを示せ。

(3) g は 0 に値をもつ定数関数であることを示せ。

[4] 実数 $\alpha > 0$ に対して領域 $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{1-x}{(1-x^2-y^2)^{\alpha/2}}$$

で定める。このとき，広義積分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が収束するための α の必要十分条件を求め，そのときの広義積分の値を求めよ。

[5] 実数 a に対して C 上の関数 P を $P(z) = z^2 + 2az + a$ により定める。次の問いに答えよ。

(1) C 上の有理型関数 $1/P(z)$ の極の位置とその位数を求めよ。

(2) $a > 1$ とする。積分 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{P(z)}dz$ を求めよ。

[6] n を自然数とする。集合 X を，整数 0 と 1 のみからなる集合 $\{0,1\}$ の n 個の直積，つまり $X = \{0,1\}^n$ とする。X の 2 つの元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ に対して，集合 $\{1, \cdots, n\}$ の部分集合 $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{i \in \{1, \cdots, n\} \mid x_i \neq y_i\}$$

とし，$d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の元の個数とする。例えば，$X = \{0,1\}^3$ で $\boldsymbol{x} = (1,0,1)$，$\boldsymbol{y} = (0,0,0)$ のとき，$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{1,3\}$ で，$d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2$ となる。次の問いに答えよ。

(1) $n = 7$, $X = \{0,1\}^7$ とする。$\boldsymbol{x} = (1,0,0,1,0,0,1)$，$\boldsymbol{y} = (0,0,0,0,1,0,1)$ とするとき，$d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の値を求めよ。

(2) X の任意の 3 つの元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対して，集合 $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ は和集合 $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cup W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ に含まれることを示せ。

(3) 関数 d_H は X 上の距離関数であることを示せ。