令和５年度（１０月期入学）及び令和６年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解 答 例**	
専 攻 名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　　（１ ／ ２）

採点においては解答のプロセスや記述の論理性も重視した。以下では，そのプロセスがわかる程度の略解を一つ示したが，異なる方針の解答もあり得る。また，具体的に解を求める問題では，解の表し方が以下とは異なる解答もあり得る。

[1] (1)　2。

(2)　$W_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \boldsymbol{R} \right\}$, $\widetilde{W_2} = \boldsymbol{R}^3$。

(3)　$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$。

[2] (1)　線型写像の定義 $(T_g(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 T_g(X_1) + \lambda_2 T_g(X_2),\ X_1, X_2 \in V,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R})$ に基づいて示す。

(2)　V の基底 S に関する写像 T_g の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

(3)　$\dim \operatorname{Ker}(T_g - \mathrm{Id}_V) = 2$ であり，基底の例として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる。

$\dim \operatorname{Im}(T_g - \mathrm{Id}_V) = 2$ であり，基底の例として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる。

[3] (1)　$x \in [0,1]$ について $\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq \max_{x\in[0,1/2]} |g(x)|$, $\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \max_{x\in[1/2,1]} |g(x)|$ となるので，次のように求める不等式が導ける。

$$4|g(x)| = \left|g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \max_{x\in[0,1/2]} |g(x)| + \max_{x\in[1/2,1]} |g(x)|.$$

(2)　$|g(x)|$ は $x_0 \in [0,1]$ において最大値 $|g(x_0)|$ になるとする。(1) の不等式を用いると

$$4|g(x_0)| \leq \max_{x\in[0,1/2]} |g(x)| + \max_{x\in[1/2,1]} |g(x)| \leq |g(x_0)| + |g(x_0)| = 2|g(x_0)|$$

を得る。つまり，$|g(x_0)| \leq 0$ となり，最大値 $|g(x_0)|$ は 0 となる。

(3)　任意の $x \in [0,1]$ について (2) より $|g(x)| \leq 0$ が成立する。つまり, $|g(x)| = 0$ なので, $g(x) = 0$ となり，$g(x)$ は 0 に値をもつ定数関数となる。

[4]　$D_n = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 - \dfrac{1}{n} \right\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ とおくと，$\{D_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ は D の近似増大列である。極座標変換を用いることで

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2-\alpha}\left(1 - n^{-1+\frac{\alpha}{2}}\right) & (\alpha \neq 2) \\ \pi \log n & (\alpha = 2) \end{cases}$$

と計算できる。よって，広義積分が収束するための必要十分条件は $0 < \alpha < 2$ であり，そのときの広義積分の値は $\dfrac{2\pi}{2-\alpha}$ となる。

[5] (1)　$a \neq 0,\ 1$ のとき，$1/P(z)$ は $z = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$ で 1 位の極をもつ。$a = 0$ のとき，$1/P(z)$ は $z = 0$ で 2 位の極をもつ。$a = 1$ のとき，$1/P(z)$ は $z = -1$ で 2 位の極をもつ。

(2)　まず，(1) より極の位置を確認する。$|-a-\sqrt{a^2-a}| > 1$ なので，一つの極は円 $|z| = 1$ の外側にある。次に $(-a+\sqrt{a^2-a})(-a-\sqrt{a^2-a}) = a^2 - (a^2 - a) = a$ を用いると $|a - \sqrt{a^2-a}| = \frac{a}{a+\sqrt{a^2-a}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-a^{-1}}} < 1$ なので，もう一つの極は円 $|z| = 1$ の内側にある。したがって，留数定理より次を得る。

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{P(z)} dz = 2\pi i \frac{1}{-a+\sqrt{a^2-a}+a+\sqrt{a^2-a}} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2-a}}.$$

[6] (1)　$W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{1, 4, 5\}$ より $d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 3$ となる。

(2)　$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$，$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ とする。$i \in W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ としたとき，$i \in W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cup W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成り立つことを示せばよい。このことは，$x_i \neq z_i$ ならば「$x_i \neq y_i$ または $y_i \neq z_i$」の対偶が「$x_i = y_i$ かつ $y_i = z_i$」ならば $x_i = z_i$ であることより従う。

(3)　関数 d_H が四つの性質（非負値性）（非退化性）（対称性）（三角不等式）を満たすことを確認すればよい。非負値性と非退化性と対称性については d_H の定義に基づいて示す。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ とし， 集合 A の元の個数を $\#(A)$ で表す。このとき，(2) より

$$\begin{aligned} d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \#W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &\leq \#(W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cup W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) \\ &\leq \#(W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) + \#(W(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) = d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

を得る。つまり，d_H は三角不等式を満たす。