| 令和５年度（１０月期入学）及び令和６年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験<br>問 題 用 紙 | | |
|---|---|---|
| 専攻名 | 機械科学専攻，フロンティア工学専攻，電子情報通信学専攻，地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース | |
| 試験科目名 | 数学 | P.（１／１） |

2023 年 8 月 22 日（火）9:00 – 10:00

[注意]　1. 問題 I，II，III，IV のうち，２題を選択して解答すること。

2. 解答は選択問題ごとに分けて，１題を１枚の答案用紙の表だけに書くこと。

3. 選択問題の番号を，各答案用紙左上の $\square$ 内に記入すること。

I　問１　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$(4y^3 - 3xy^2) + (2x^2y - 3xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$　　(2)　$-x\dfrac{dy}{dx} + y = 3x^2y^2$

(3)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$　　(4)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 3y = \sin x$

II　領域 $V = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z \leqq 5,\ 1 \leqq z \leqq 5\}$ とその境界である閉曲面 $S$，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (6xz^2, 2x^2yz, -x^2z^2)$，スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x + y + 3z^2$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

問１　$\nabla\varphi$, $\nabla \times \boldsymbol{A}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ。

問２　閉曲面 $S$ と平面 $y = 0$ との共通部分により定まる閉曲線を $C$ とする。$C$ の弧長を求めよ。但し，必要ならば微分公式 $\left\{t\sqrt{t^2+1} + \log(\sqrt{t^2+1} + t)\right\}' = 2\sqrt{t^2+1}$ を使用せよ。

問３　$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \nabla\varphi$ とし，$S$ の外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。このとき，面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ。

III　虚数単位は $i$ と記して $\alpha$ を複素数とする。有理関数 $R(z) = \dfrac{\alpha}{z-3} + \dfrac{6i}{(z+2)^3} - \dfrac{2z}{(z-1)^2}$ を用いて，複素関数 $f(z)$ を $f(z) = R(z)e^{\pi iz}$ と定める。次の問いに答えよ。

問１　$f(z)$ の極をすべて求めよ。さらにそれらが，極の位数まで考慮した場合でも，$R(z)$ のすべての極と完全に一致する理由も挙げよ。

問２　各極における関数 $f(z)$ の留数を計算せよ。

問３　複素平面上の円 $\{z : |z - 2 + i| = \sqrt{5}\}$ を一周する閉曲線を $C$ とする。$C$ に沿う複素積分 $\displaystyle\int_C R(z)\,dz$ と $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値が等しくなるような定数 $\alpha$ を求めよ。

IV　$f(t)$ は $t \geqq 0$ で定義される実関数とする。関数 $f(t)$ のラプラス変換は $\mathcal{L}[f(t)](s) := \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ で与えられる。次の問いに答えよ。但し，必要ならば等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を使用せよ。

問１　$\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$　$(s > 0)$ を示せ。

問２　実連続関数 $g(t)$ は $t \geqq 0$ で有界，すなわち，定数 $M > 0$ があり $|g(t)| < M$ が任意の $t \geqq 0$ で成立しているとする。さらに，$g(t)$ は任意の $t > 0$ で微分可能であり，$g(0) = 0$ を満たす。このとき，$\mathcal{L}[g'(t)](s) = s\,\mathcal{L}[g(t)](s)$ $(s > 0)$ を示せ。

問３　関数 $G(t) := \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx$ $(t \geqq 0)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[G(t)](s)$ を求めよ。