令和５年度（１０月期入学）及び令和６年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験

解 答 例

専攻名	機械科学専攻，フロンティア工学専攻，電子情報通信学専攻，地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース	
試験科目名	数学 (公開用)	P.（１／１）

I　問１（以下 C, C' は任意定数。）

(1) 同次形の微分方程式 $y' = \dfrac{3(\frac{y}{x})^2 - 4(\frac{y}{x})^3}{2\frac{y}{x} - 3(\frac{y}{x})^2}$ で $z = \frac{y}{x}$ とおく。$\dfrac{2z - 3z^2}{z^2 - z^3}dz = \dfrac{1}{x}dx$ の両辺を積分して $z^2 - z^3 = C'x$ を得た後 $z = \frac{y}{x}$ を代入して $\underline{xy^2 - y^3 = C'x^4}$.

(2) ベルヌーイの微分方程式 $y' - \frac{1}{x}y = -3xy^2$ なので　$z = \frac{1}{y}$ とおいて式変形すると $(xz)' = 3x^2$. これを解き $z = \frac{1}{y}$ を代入して $\underline{y = \dfrac{x}{x^3 + C}}$.

(3) 特性方程式 $s^2 + 3s + 3 = 0$ の解が $s = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であることから求める解は

$$\underline{y = e^{-\frac{3}{2}x}(C \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C' \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x).}$$

(4) $y_1 = a \sin x + b \cos x$ を与式に代入すると $(2a - 3b)\sin x + (3a + 2b)\cos x = \sin x$. よって $a = \frac{2}{13}$, $b = -\frac{3}{13}$ となるので特殊解は $y_1 = \frac{2}{13}\sin x - \frac{3}{13}\cos x$. 一般解は同次方程式 (3) の解との和として　$\underline{y = e^{-\frac{3}{2}x}(C \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C' \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{13}(2\sin x - 3\cos x).}$

II　問１　$\underline{\nabla\varphi = (1, 1, 6z)}$, $\underline{\nabla \times \boldsymbol{A} = (-2x^2y, 2xz^2 + 12xz, 4xyz)}$, $\underline{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 6z^2}$.

問２　$z > 1$ の曲線 C は $\boldsymbol{r}(x) = (x, 0, 5 - x^2)$, $-2 < x < 2$ と書け，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dx} = (1, 0, -2x)$ よりこの部分の弧長 L_1 は $L_1 = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}\right| dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}dx$.

微分公式を使うと $L_1 = 2\displaystyle\int_0^4 \sqrt{1 + t^2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(4\sqrt{17} + \log(\sqrt{17} + 4)$. 他方，$z = 1$ となる C の部分の弧長は 4 なので全弧長は $\underline{2(2 + \sqrt{17}) + \frac{1}{2}\log(\sqrt{17} + 4).}$

問３　$\boldsymbol{B} = (6xz^2 - 1, 2x^2yz - 1, -x^2z^2 - 6z)$ で，Gauss の定理より $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}dS = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}dV$.

他方，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 6z^2 - 6$ を使って，$\displaystyle\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}dV = \int_1^5 6\left[\pi(5 - z)(z^2 - 1)\right]dz$. $s = z - 1$ とすると $= \displaystyle\int_0^4 6\pi(8s + 2s^2 - s^3)ds = \underline{256\pi}$.

III　問１　極は $\underline{z = 3\ (1\ 位),\ z = -2\ (3\ 位),\ z = 1\ (2\ 位)}$。 また，$R(z)$ と $f(z)$ が同じ場所に同じ位数の極をもつ理由は，指数関数 $e^{\pi iz}$ が複素平面全体で極と零点いずれも持たないため。

問２　$\underline{\mathrm{Res}(f, 3)} = \lim\limits_{z\to 3}(z - 3)R(z)e^{\pi iz} = \alpha e^{3\pi i} \underline{= -\alpha}$,

$\underline{\mathrm{Res}(f, -2)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to -2}\{(z + 2)^3R(z)e^{\pi iz}\}'' = \dfrac{1}{2} \cdot 6i(\pi i)^2e^{-2\pi i} \underline{= -3\pi^2 i}$,

$\underline{\mathrm{Res}(f, 1)} = \lim\limits_{z\to 1}\{(z - 1)^2R(z)e^{\pi iz}\}' = \lim\limits_{z\to 1}(-2ze^{\pi iz})' = -2(e^{\pi i} + \pi ie^{\pi i}) \underline{= 2(1 + \pi i)}$.

問３　曲線 C 内にある極は $z = 1, 3$ だけなので，留数定理から　$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}(f, 1) + \mathrm{Res}(f, 3)\} = 2\pi i(-\alpha + 2 + 2\pi i)$ で同様に $\int_C R(z)\,dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}(R, 1) + \mathrm{Res}(R, 3)\} = 2\pi i(\alpha - 2)$. ここで C の向きは共に反時計回りとしている。以上から $\underline{\alpha = 2 + \pi i.}$

IV　問１　$y = \sqrt{st}$ と変数変換し，ラプラス変換の積分を書き換え $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて題意を得る。

問２　$y = \sqrt{st}$ と変数変換し，ラプラス変換の積分を書き換え $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて題意を得る。

問３　問 2 の $g(t)$ に $G(t)$ を適用出来ることを確かめ，問 2 で証明した式を用いて $\mathcal{L}[G(t)](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[G'(t)](s) = \underline{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}}$ $(s > 0)$ を得る。