令和4年度 (10月期入学) 及び 令和5年度
金沢大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験
数物科学専攻計算科学コース

専門科目

注意事項

1. 問題冊子は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文10ページであり，答案用紙は4枚，下書用紙は1枚である。
3. 数学 (I～IV) と基礎物理 (V～VIII) と計算機 (IX，X) の3分野の中から2分野以上の問題4問を選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。
4. 1問につき1枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面においては上部 (表の横線の上に相当する部分) は使用しないこと。
5. 問題冊子と下書用紙は持ち帰ること。

I

以下の問いに答えよ。

問１　極限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

を求めよ。

問２　$x>1$ のとき，関数

$$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\log t}{t}\,dt$$

の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問３　不等式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\,dx > \frac{\pi}{6}$$

を証明せよ。

II

以下の問いに答えよ。

問１ 極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$$

が存在するかどうか調べよ。存在すれば，その極限を求めよ。

問２ $\mathbb{R}^2$ の領域

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+1 \leq y\}$$

に対して，広義重積分

$$\iint_D \frac{1}{y^2}\,dydx$$

は収束することが知られている。この広義重積分の値を求めよ。

III

以下の問いに答えよ。

問１ V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。写像 $f: V \to W$ (以下, $V \xrightarrow{f} W$ と書く) が線形写像であることの定義を述べよ。また, 核 $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$ と像 $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \in W | v \in V\}$ がそれぞれ V, W の部分空間になることを証明せよ。

問２ 自然数 n について $\mathbb{R}^n$ を n 次元列ベクトルの空間とする。$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ を行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 7 & 10 & 14 & 3 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^4$) とする。この行列 A の階数を求めよ。また, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ。

問３ V_j ($j = 1, 2, 3, 4$) を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \xrightarrow{f_3} V_4$$

となる線形写像 f_k ($k = 1, 2, 3$) が

(i) f_1 は単射, f_3 は全射,

(ii) $k = 2, 3$ のとき, $\mathrm{Im}(f_{k-1}) = \mathrm{Ker}(f_k)$

を満たすとする。このとき,

$$\dim V_1 + \dim V_3 = \dim V_2 + \dim V_4$$

が成り立つことを証明せよ。

IV

対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ。

問１　A の異なる固有値とその重複度を求めよ。

問２　A の各固有値に対して，固有空間の基底を一組求めよ。

問３　${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P と行列 ${}^tPAP$ を求めよ。ここで ${}^tP$ は P の転置行列を表す。

問４　任意の自然数 n について行列 A^n を実数成分の 3×3 行列として表せ。

V

床からの高さ h の位置からボールを初速度 0 で落下させた。しばらくはね返りを続けた後，床の上に静止した。重力加速度の大きさを g，はね返り係数を e $(0 < e < 1)$ として以下の問 1 〜問 5 に答えよ。ただし，ボールは質点として考えてよく，空気抵抗は無視してよい。

問 1　ボールが最初に落下を始めた時から床に衝突するまでの時間 t_0 と，衝突直前の速さ v_0 を求めよ。

問 2　ボールが最初にはね返った直後の速さは $v_1 = ev_0$ である。最初にはね返った瞬間からボールが上昇し，上り切って速さが瞬間的に 0 になるまでに要した時間 t_1 と上昇した距離 h_1 を e，g，h を用いて表せ。

問 3　最初にはね返って上昇し高さ h_1 の位置で瞬間的に静止した状態から，再び落下して床に達するまでに要する時間が t_1 に等しいことを示せ。

問 4　ボールと床が n 回目の衝突を行った瞬間からボールがはね上がって，そして速さが瞬間的に 0 になるまでに要する時間 t_n を e，g，h を用いて表せ。

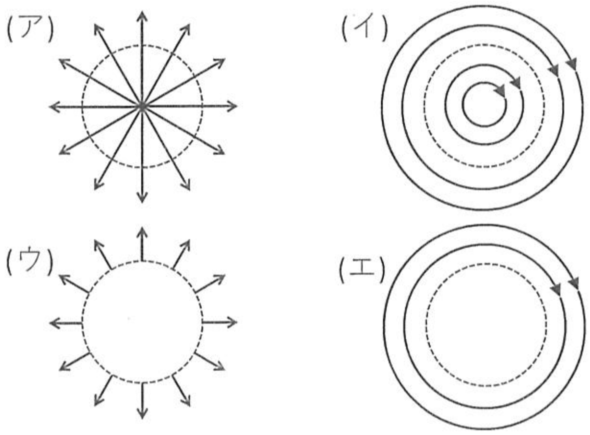
問 5　ボールが高さ h から落下を始めてから静止するまでの時間 T を e，g，h を用いて表せ。

令和４年度（１０月期入学）及び令和５年度金沢大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学試験 問　題　用　紙		
専攻名	数物科学専攻 (計算科学コース) (一般選抜)	
試験科目名	専門科目 基礎物理	P. ６／１０

VI

真空中に置かれた点 O を中心とする半径 a の導体球に電荷 $Q\ (>0)$ を与える。真空での誘電率を ϵ_0 とし，点 O から無限遠方での電位を 0 とする。

問 1　点 O を含む平面上での電場の模式図を表しているものはどれか，以下の図に示す (ア)〜(エ) から 1 つ選んで答えよ。ただし，点線の円は導体球の球面を表し，実線は電気力線を示すものとする。また，実線の矢印は電場の向きを表すものとする。



図：(ア)〜(エ)

問 2　点 O からの距離を r とする。導体球の内側 $(r < a)$ と導体球の外側 $(r > a)$ における電場の大きさ $E(r)$ をそれぞれ求めよ。

問 3　導体球の内側と導体球の外側における電位 $\phi(r)$ をそれぞれ求めよ。

問 4　この系に蓄えられる静電場のエネルギーを求めよ。

問 5　半径 a の導体球の代わりに，電荷 Q を一様な電荷密度で分布させた半径 a の球を考えた場合，系に蓄えられる静電場のエネルギーは変化しないか，増加するか，減少するか，簡単な説明とともに答えよ。

VII

3次元空間において，原点を中心とする中心力ポテンシャル V に束縛された質量 m の粒子を考える。V は動径 r (原点からの距離) と定数 k (>0) を用いて，$V(r)=-k/r$ と書ける。波動関数は球対称とし，動径方向波動関数 $\phi(r)$ が満たすシュレディンガー方程式は，E をエネルギー固有値，$\hbar$ を換算プランク定数として，

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)-\frac{k}{r}\right]\phi(r)=E\phi(r)$$

である。この方程式を満たす $\phi(r)$ として $A\exp(-\alpha r)$ を考える。ただし A，α は正の定数である。

問１　E が r に依存しないことから α を求めよ。

以下の問２～問６では，α をあらわに用いずに，m，k，$\hbar$ を用いて答えよ。

問２　E を求めよ。

問３　原点を中心とする半径 r の球面上に粒子を見いだす確率密度を $P(r)=4\pi r^2|\phi(r)|^2$ とする。$P(r)$ が最大値をとるときの r を求めよ。

問４　$\displaystyle\int_0^\infty P(r)dr=1$ より A を求めよ。

問５　$V(r)$ の期待値を求め，E の何倍の値であるか答えよ。

問６　r の期待値を求めよ。

VIII

質量 m，ばね定数 k の一次元調和振動子を考える。調和振動子の角振動数を ω とすると，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と書ける。分配関数は

$$Z(\beta) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dqdp \exp\{-\beta H(q,p)\} \tag{1}$$

と定義される。ここで，$H(q,p)$ はハミルトニアン，q はつり合いの位置からの変位，p は運動量，h はプランク定数である。また β は，ボルツマン定数を k_{B}，温度を T として $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ である。必要なら公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

を用いよ。

問１　$H(q,p)$ を，m，ω，q，p を用いて表せ。

問２　式 (1) の積分を実行して $Z(\beta)$ を求めよ。

問３　内部エネルギー E はハミルトニアンの統計平均

$$E = \langle H(q,p)\rangle = \frac{\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dqdpH(q,p)\exp\{-\beta H(q,p)\}}{Z(\beta)}$$

で与えられる。ここで，$\langle A\rangle$ は物理量 A の統計平均を表す。関係式

$$E = -\frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta}$$

が成り立つことを示せ。

問４　問２と問３より E を求めよ。

IX

ラマヌジャンとハーディの有名な逸話を紹介する。
[redacted] (G. H. Hardy, "Srinivasa Ramanujan", Proceedings of the London Mathematical Society (2), 19 (1921), xl–lviii より翻訳・改変)

実際，1729 は

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

と２つの立方数の和で２通りに表すことができる。このとき，ラマヌジャンの主張「2 つの立方数の和で表したときに，ちょうど２通りに表すことのできる最小の数が 1729 である」を確認するプログラムを Fortran または C 言語を使用して書け。ただし，ここでの立方数は自然数を３乗した数とし，計算時間を短くする工夫はしなくてもよい。

X

質点とみなせる１つの粒子について１次元の運動を考える。ニュートンの運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

と与えられる。ここで, m は粒子の質量, x は粒子の位置座標, F は粒子に働く力, t は時間変数である。m は定数で, x と F は t の関数である。ただし時刻 t での関数値 $F(t)$ は常に, $x(t)$ のみの関数として計算できるものとする。時間の微少量を Δt として $x(t+\Delta t)$, $x(t-\Delta t)$ に対して, t を中心とするテイラー展開を用いることにより

$$x(t+\Delta t) = 2x(t) - x(t-\Delta t) + \frac{(\Delta t)^2}{m}F(t) \tag{1}$$

と近似できる。

一方, 系の力学的エネルギー E は,

$$E(t) = \frac{1}{2}m\{v(t)\}^2 + U(x(t)) \tag{2}$$

で与えられる。ここで v および U は, それぞれ粒子の速度とポテシャルエネルギーであり,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

で与えられる。

問１ $x(t+\Delta t)$ に対する t を中心とする Δt の３次までのテイラー展開式を求めよ。

問２ $x(t+\Delta t)$ と $x(t-\Delta t)$ の t を中心とするテイラー展開式で, Δt の２次まで考慮することにより, 速度 $v(t)$ を計算する近似式を求めよ。

問３ 粒子に働く力は, $F=-\gamma x^3$ $(\gamma>0)$ とする。このとき, $U(x)=\gamma x^4/4$ である。初期値 $x(0)$, m, Δt, γ を標準入力から読み込んで, 式 (1) と式 (2) に従って $x(\lambda\Delta t)$ および $E(\lambda\Delta t)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \dots, 500)$ を計算し, 標準出力へ書き出すプログラムを Fortran または C 言語を使用して書け。ただし, $v(0)=0$, $x(\Delta t) = x(0) + \dfrac{F(0)(\Delta t)^2}{2m}$ とする。