解答 I

問 1

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - \sin x}{(\sin x)(e^x - 1)}$$

ここではテイラー展開を利用した解答を与える。

$$\sin x = x + O(x^3) \qquad e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

を代入して，

$$\frac{e^x - 1 - \sin x}{(\sin x)(e^x - 1)} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{(x + O(x^3))(x + O(x^2))} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^3)} = \frac{\frac{1}{2} + O(x)}{1 + O(x)}$$

から，求める極限は $\frac{1}{2}$ になることがわかる。

問 2 $G(t)$ を被積分関数 $\frac{\log t}{t}$ の原始関数の 1 つとする。このとき，

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\log t}{t}\, dt = G(x^2) - G(1)$$

になる。よって，

$$f'(x) = 2xG'(x^2) = 2x\frac{\log(x^2)}{x^2} = 4\frac{\log x}{x}$$

を得る。

問 3 $x > 0$ ならば，$4 - x^2 - x^3 < 4 - x^2$ である。これから，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}\, dx > \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2 - x^2}}\, dx = \left[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

を得る。

解答 II

問１　$y=0$ に沿った極限は

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

であるが，$y=x$ に沿った極限は

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+O(x^4)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

である。よって，極限は存在しない。

問２

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{y^2}\,dydx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x^2+1}^{\infty}\frac{1}{y^2}\,dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[\frac{-1}{y}\right]_{x^2+1}^{\infty}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

解答 III

問１ <u>f が線形写像であること</u>：$f(x+y) = f(x)+f(y) \quad (^\forall x, y \in V)$ および $f(ax) = af(x) \quad (^\forall x \in V, ^\forall a \in \mathbb{R})$ である。

<u>$\mathrm{Ker}(f)$ が V の部分空間であること</u>：V, W のゼロベクトルをそれぞれ $0_V, 0_W$ とおく。一般に $f(0_V) = 0_W$ より，$0_V \in \mathrm{Ker}(f)$。$x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると，$f(x) = f(y) = 0_W$。$f(x+y) = f(x)+f(y) = 0_W + 0_W = 0_W$ なので $x+y \in \mathrm{Ker}(f)$。また，$x \in \mathrm{Ker}(f)$, $a \in \mathbb{R}$ とすると，$f(x) = 0_W$ より $f(ax) = af(x) = a0_W = 0_W$ なので $ax \in \mathrm{Ker}(f)$。

<u>$\mathrm{Im}(f)$ が W の部分空間であること</u>：$f(0_V) = 0_W$ なので $0_W \in \mathrm{Im}(f)$。$f(x), f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ とすると，$f(x)+f(y) = f(x+y) \in \mathrm{Im}(f)$。また，$f(x) \in \mathrm{Im}(f), a \in \mathbb{R}$ とすると，$af(x) = f(ax) \in \mathrm{Im}(f)$。

問２ 線形写像を与える行列の階数は３である。ゆえに，$\dim \mathrm{Im}(f) = 3$ であり，$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Im}(f) = 4 - 3 = 1$ であるので，$\mathrm{Ker}(f)$ の非ゼロベクトルを１つ求めればよい。例えば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$。

問３

$$\begin{aligned} \dim V_1 - \dim \mathrm{Ker}(f_1) &= \dim \mathrm{Im}(f_1), \\ \dim V_2 - \dim \mathrm{Ker}(f_2) &= \dim \mathrm{Im}(f_2), \\ \dim V_3 - \dim \mathrm{Ker}(f_3) &= \dim \mathrm{Im}(f_3) \end{aligned} \qquad (*)$$

に条件 (i)

$$\begin{aligned} f_1 &: 単射 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(f_1) = 0, \\ f_3 &: 全射 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(f_3) = \dim V_4 \end{aligned}$$

および条件 (ii)

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}(f_1) &= \dim \mathrm{Ker}(f_2), \\ \dim \mathrm{Im}(f_2) &= \dim \mathrm{Ker}(f_3) \end{aligned}$$

を当てはめるとよい。式 $(*)$ から始めると

$$\begin{gathered} \dim V_3 - \dim \mathrm{Ker}(f_3) = \dim \mathrm{Im}(f_3), \\ \dim V_3 - (\dim V_2 - \dim \mathrm{Ker}(f_2)) = \dim V_4, \\ \dim V_3 - \dim V_2 + (\dim V_1 - \dim \mathrm{Ker}(f_1)) = \dim V_4, \\ \dim V_1 + \dim V_3 = \dim V_2 + \dim V_4 \end{gathered}$$

である。

解答 IV

問１　固有値は -5 (重複度 1)，1 (重複度 2)。

問２　固有値 -5 の固有空間の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$。固有値 1 の固有空間の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$。

問３　固有値 -5 の固有空間の正規直交基底として，例えば $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}$ がとれる。固有値 1 の固有空間の正規直交基底として，例えば $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\}$ がとれる。この場合，直交行列 $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ により ${}^tPAP=\begin{pmatrix}-5 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ と対角化される。

問４　問３の結果より

$$
{}^tPA^nP=\begin{pmatrix}(-5)^n & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}
$$

である。ゆえに，

$$
\begin{aligned}
A^n &= P\begin{pmatrix}(-5)^n & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}{}^tP\\
&= \begin{pmatrix}(2+(-5)^n)/3 & (1-(-5)^n)/3 & (-1+(-5)^n)/3\\ (1-(-5)^n)/3 & (2+(-5)^n)/3 & (1-(-5)^n)/3\\ (-1+(-5)^n)/3 & (1-(-5)^n)/3 & (2+(-5)^n)/3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る。

解答 V

問１　ボールの質量を m とすると，エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ と書けるので，$v_0 = \sqrt{2gh}$。落下を開始した時刻を $t = 0$ とすると床に衝突する直前の速度は $v = gt$ なので，$t_0 = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$。

問２　エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1$。従って $h_1 = e^2 h$。また上昇を始めた時刻を $t = 0$ とすると，ボールの速度は $v = v_1 - gt$。時刻 $t = t_1$ で速度が 0 になるので $0 = v_1 - gt_1$。よって $t_1 = e\sqrt{\frac{2h}{g}}$。

問３　再落下して床に達するまでに要した時間は，問１の解答で h を h_1 と置き換えた場合と等しい。床に衝突するまでの時間を t とすると，$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = e\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_1$ となり t_1 に等しい。

問４　ボールが床と衝突するごとに，はね上がり切る時間は e 倍になる。従って

$$t_n = et_{n-1} = \cdots = e^n t_0 = e^n\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

問５

$$\begin{aligned}
T &= \lim_{n\to\infty}(t_0 + 2t_1 + \cdots + 2t_n) \\
&= t_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} t_n \\
&= \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^n\right) t_0 \\
&= \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}
\end{aligned}$$

解答 VI

問１ (ウ)。電場は導体内には存在しない。電荷は球面上に一様に現れ，電気力線は導体外で球面の法線方向を向く。

問２ ガウスの法則を用いると，

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

問３ 無限遠方を基準にするので $\phi(r) = -\int_\infty^r E(r')dr'$ となる。

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & (r < a) \end{cases}$$

問４ 静電場は球の外部にしか存在しないので，

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr = \int_a^\infty \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

問５ 増加する。

(説明) 電荷 Q を電荷密度が一様になるように与えた半径 a の球の場合，球の外側の電場は導体球と同じである。一方で，電荷密度が一様になるように与えた球の場合のみ，球の内部に電場が存在し，エネルギーが増加する。

解答 VII

問 1　$\phi(r) = A\exp(-\alpha r)$ を方程式に代入すると，$E = -\dfrac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \left(\dfrac{\hbar^2\alpha}{m} - k\right)\dfrac{1}{r}$ である。

( ) 内がゼロとなる条件から，$\alpha = \dfrac{mk}{\hbar^2}$。

問 2　問 1 より，$E = -\dfrac{\hbar^2\alpha^2}{2m} = -\dfrac{mk^2}{2\hbar^2}$。

問 3　$r = 0$，$r = \infty$ では $P(0) = P(\infty) = 0$ であり，$\dfrac{dP}{dr} = 8\pi A^2 r(1-\alpha r)\exp(-2\alpha r)$ なので，$r = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\hbar^2}{mk}$ において $P(r)$ は最大値をとる。

問 4　$A^2\displaystyle\int_0^\infty 4\pi r^2 \exp(-2\alpha r)dr = 1$ より，$A = \left(\dfrac{\alpha^3}{\pi}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{m^3k^3}{\pi\hbar^6}\right)^{1/2}$。

問 5　V の期待値は $-kA^2\displaystyle\int_0^\infty 4\pi r\exp(-2\alpha r)dr = -\alpha k = -\dfrac{mk^2}{\hbar^2}$。これは E の 2 倍である。

問 6　r の期待値は $A^2\displaystyle\int_0^\infty 4\pi r^3\exp(-2\alpha r)dr = \dfrac{3}{2\alpha} = \dfrac{3\hbar^2}{2mk}$。

解答 VIII

問１

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

問２　式 (1) に $H(q,p)$ を代入して積分すると，

$$Z(\beta)=\frac{2\pi}{\beta h\omega}$$

問３

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\ln Z(\beta)}{\partial\beta} &= -\frac{\partial\ln Z}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} \\
&= \frac{1}{Z}\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dqdpH(q,p)\exp\{-\beta H(q,p)\} \\
&= \langle H(q,p)\rangle
\end{aligned}$$

より，関係式が示される。

問４　問３の関係式に問２の結果を代入して，

$$E=\frac{1}{\beta}=k_{\mathrm{B}}T$$

解答 IX

解答例として，C 言語によるプログラムの例を挙げる。

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
        int X, T, N, i,j, a[2], b[2];

        X = 1;
        T = 1729;
        N = 0;

        for(X=1;X<=T;X++)
        {
                for(i=1;i<=12;i++)
                {
                        for(j=i;j<=12;j++)
                        {
                                if(X== i*i*i + j*j*j)
                                {
                                        if(N==2){N++;break;}
                                        a[N]=i;b[N]=j;N++;
                                }
                        }
                        if(N==3)break;
                }

                if( (N==2 && X<T) || (N!=2 && X==T))
                {
                        printf("Ramanujan made a mistake!\n");
                }
                if(N==2 && X==T)
                {
                        printf("Ramanujan is correct.\n");
                        printf("1729 = %d^3 + %d^3\n", a[0],b[0]);
                        printf("1729 = %d^3 + %d^3\n", a[1],b[1]);
                }
                N = 0;

        }
        return 0;
}
```

解答 X

問１

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x(t)}{dt^2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x(t)}{dt^3}(\Delta t)^3$$

問２

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x(t)}{dt^2}(\Delta t)^2,$$
$$x(t-\Delta t) = x(t) - \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x(t)}{dt^2}(\Delta t)^2$$

であるので，$x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)$ より

$$x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t) = 2\frac{dx(t)}{dt}\Delta t$$

となる。$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$ なので

$$v(t) = \frac{1}{2\Delta t}\{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)\}$$

問３　解答例として，Fortran によるプログラムの例を挙げる。

```
      program main
      real m, dt, gamma, x0, x1, x2, v
      integer i
      read(05,*) x0, m, dt, gamma
 500  format(2e15.6)
      v=0.0
      write(06,500) x0, v**2*m*0.5+0.25*gamma*x0**4
      x1=x0+(-gamma)*x0**3*dt**2/(2.0*m)
      do i=1,500
        x2=2.0*x1-x0+(-gamma)*x1**3*dt**2/m
        v=(x2-x0)/(2.0*dt)
        write(06,500) x1, v**2*m*0.5+0.25*gamma*x1**4
        x0=x1
        x1=x2
      enddo
      stop
      end
```