令和4年度（10月期）及び令和5年度　金沢大学大学院自然科学研究科 **博士前期課程入学試験**	
専 攻 名	数物科学専攻（物理学コース） （一般選抜）
試験科目名	専門科目　　物理学
	問題は４問であり，全ての問題に解答してください。
問題用紙等枚数	問題用紙　　　計　６　枚（この表紙は含まない） 答案用紙　　　計　４　枚 下書き用紙　　計　４　枚
試 験 日 程	令和４年８月２３日（火）実施

〔全般的な解答に際しての注意事項〕

・試験開始直後に，問題用紙等が上記指定の枚数のとおりあるか確認してください。

・すべての答案用紙に「志願専攻」及び「受験番号」を記入してください。なお，氏名はどこにも書いてはいけません（書いた場合は，不正行為とみなします）。

・問題用紙・下書き用紙は，各自持ち帰っても差し支えありません。

〔専攻別注意事項〕

・１問につき１枚の答案用紙で解答し，答案用紙には問題番号を明記すること。

・必要であれば答案用紙の裏面を使っても良い。ただし，「裏に続く」と明記すること。また，裏面においても上から約 8cm の部分（表面の受験番号等記入欄に対応する部分）は解答に使用しないこと。

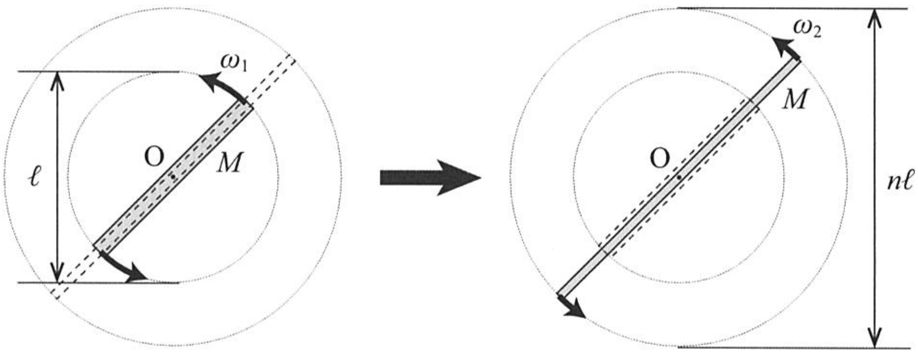
令和 4 年度 (10 月期入学) 及び令和 5 年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験

問　題　用　紙

専攻名	数物科学専攻（物理学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目　　物理学	P.　1／6

I

滑らかな平面上に質量 M の棒がある。図 1 は平面上にある棒を上から見た図である。この棒の厚みや幅は長さに比べて無視でき，棒の線密度は一様である。この棒は，その重心を通り平面に垂直な軸 O のまわりに滑らかに回転し，その質量を変えることなく長さ ℓ の形態 1 から長さ $n\ell$ $(n > 0)$ の形態 2 へと瞬時に形態を変えることができる (図 1)。ただし，棒が形態 1，もしくは形態 2 の状態にあるときは，それぞれ線密度が一様な剛体棒として扱うことができ，形態変化後も棒は滑らかに回転する。はじめに，棒に空気抵抗がはたらかないものとして，以下の問いに答えなさい。



形態 1　　　　形態 2

図 1

問 1　形態 1 と形態 2 の棒の線密度を M, ℓ, n から必要なものを用いてそれぞれ表しなさい。

問 2　棒が形態 1 のとき，軸 O のまわりの慣性モーメント I_1 を M, ℓ を用いて表しなさい。

問 3　棒が形態 2 のとき，軸 O のまわりの慣性モーメント I_2 は I_1 の何倍か答えなさい。

問 4　角速度 ω_1 で回転していた形態 1 の棒が形態 2 に変化すると，棒は角速度 ω_2 で回転した。この変化の前後で棒の角運動量は保存されるとして，ω_2 を I_1, I_2, ω_1 を用いて表しなさい。

次に，形態 2 の状態で棒が回転しているときに空気抵抗がはたらく場合を考える。棒の各微小部分に対して，その速さに比例した空気抵抗がはたらくものとし，この空気抵抗に関する単位長さ当たりの比例係数を k (> 0) とする。形態 2 の状態の棒が回転をはじめたときの時刻を $t = 0$ とし，その後の時刻 t における棒の角速度を $\omega(t)$ (> 0) として，以下の問いに答えなさい。

問 5　棒の重心を原点として棒の長さ方向に x 軸をとる。座標 x にある棒の微小線素 dx の速さを $\omega(t)$, $|x|$ を用いて表しなさい。

問 6　問 5 の微小線素 dx にはたらく空気の抵抗力の大きさを $k, \omega(t), |x|, dx$ を用いて表しなさい。

問 7　回転する棒にはたらく抵抗力のモーメントの総和の大きさ N を $k, \omega(t), n, \ell$ を用いて表しなさい。

問 8　棒の回転に関する運動方程式を $I_2, \omega(t), \dfrac{d\omega(t)}{dt}, N$ の中から必要なものを用いて書きなさい。

問 9　問 7 と問 8 の関係式を用いて $\omega(t)$ を求めなさい。ただし，時刻 $t = 0$ での棒の角速度を ω_0 とし，解答には N を用いないこと。

II

図 2 のように抵抗値 R の抵抗，電気容量 C のコンデンサー，自己インダクタンス L のコイル，起電力 E の電池，スイッチ S からなる回路がある。スイッチは a 側，b 側に切り換えることができ，電池の内部抵抗は無視できるものとする。

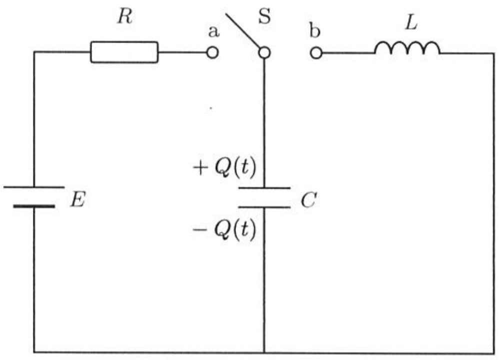


図 2

時刻 $t=0$ のとき，スイッチを a 側にいれてコンデンサーの充電を開始した。その後の時刻 t において，この閉回路に流れる電流を $I(t)$，コンデンサーに蓄えられている電荷を $Q(t)$，右回りの電流を正として，以下の問いに答えなさい。

問 1　この閉回路について，E を $I(t)$, $Q(t)$, R, C を用いて表しなさい。

問 2　$Q(t)$ の変化を記述する微分方程式を $I(t)$ を用いずに答えなさい。

問 3　$Q(t)$ を C, E, R, t を用いて答えなさい。初期条件は $t=0$ で $Q(0)=0$ とする。

問 4　$I(t)$ を C, E, R, t を用いて答えなさい。

問 5　時刻 t までに電池のする仕事を C, E, R, t を用いて答えなさい。

問 6　時刻 t までに抵抗で発生するジュール熱を C, E, R, t を用いて答えなさい。

問 7　時刻 t までに電池のする仕事と抵抗で発生するジュール熱の差がコンデンサーに蓄えられたエネルギーに等しいことを示しなさい。

次に，コンデンサーの電荷が Q_0 となったとき，スイッチを b 側に切り替えた。スイッチを切り替えたときの時刻を $t=0$ とし，その後の時刻 t において，この閉回路に流れる電流を $I(t)$，コンデンサーに蓄えられている電荷を $Q(t)$，右回りの電流を正として，以下の問いに答えなさい。

問 8　この閉回路において $Q(t)$ の変化を記述する微分方程式を $I(t)$ を用いずに答えなさい。

問 9　$Q(t)$ と $I(t)$ を Q_0, L, C, t を用いて答えなさい。初期条件は $t=0$ で $I(0)=0$, $Q(0)=Q_0$ とする。

問 10　コンデンサーに蓄えられているエネルギーとコイルに蓄えられているエネルギーの和が時間によらず一定であることを示しなさい。

III

図 3 のように，常磁性体の簡単なモデルとして，一様な外部磁場に対して平行か反平行かのどちらかの配向をとる磁気モーメントをもつ N 個の独立な粒子が，上向きの外部磁場のもとにある系を考える。粒子数 N はじゅうぶん大きいとする。外部磁場の大きさを H，磁気モーメントの大きさを μ とすると，粒子 1 個のエネルギーは $\pm\mu H$ と表される。ここで，符号は磁気モーメントの方向によって決まる。全粒子のうち，$\dfrac{N+n}{2}$ 個が上向き，$\dfrac{N-n}{2}$ 個が下向きの磁気モーメントをもつとする。以下では $n>0$ の場合について考える。ボルツマン定数を k_B として以下の問いに答えなさい。

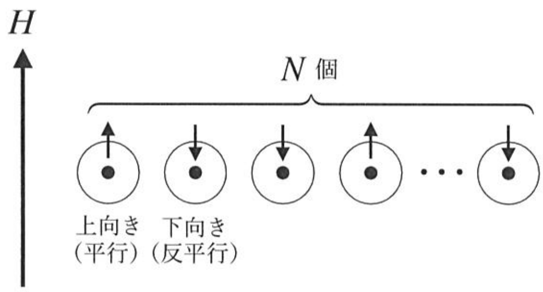


図 3

問 1　系の内部エネルギー U を μ, H, n を用いて表しなさい。

問 2　系のとりうる微視的状態数を考えることにより，エントロピー S が以下の式で表されることを示しなさい。大きな整数 x に対して成り立つスターリングの公式 $\log x! \simeq x\log x - x$ を用いること。

$$S \simeq k_B\left[N\log N - \frac{N+n}{2}\log\left(\frac{N+n}{2}\right) - \frac{N-n}{2}\log\left(\frac{N-n}{2}\right)\right]$$

問 3　系の熱平衡状態の温度を T とするとき，T は $\dfrac{1}{T}=\dfrac{\partial S}{\partial U}$ で決定される。逆温度 $\dfrac{1}{k_BT}$ が以下の式で表されることを示しなさい。

$$\frac{1}{k_BT} = \frac{1}{2\mu H}\log\left(\frac{N+n}{N-n}\right)$$

問 4　系の内部エネルギー U を μ, H, N, k_B, T を用いて表しなさい。また，U を T の関数として $T\geq 0$ の範囲についてその概形をグラフに表しなさい。グラフには $T\to 0$ と $T\to\infty$ での U の極限値を明確に示すこと。

問 5　系の定積熱容量を C とするとき，C は $C=\dfrac{\partial U}{\partial T}$ で決定される。C を μ, H, N, k_B, T で表しなさい。また，C を T の関数として $T\geq 0$ の範囲についてその概形をグラフに表しなさい。グラフには $T\to 0$ と $T\to\infty$ での C の極限値を明確に示すこと。

問 6　高温 ($k_BT \gg \mu H$) のとき，n を μ, H, N, k_B, T を用いて表しなさい。必要であれば以下に示す近似式を用いてよい。

$$|x| \ll 1 \text{ のとき } \tanh x \left(\equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \simeq x$$

問 7　高温 ($k_BT \gg \mu H$) のとき，系全体がもつ磁気モーメント (磁化) M を μ, H, N, k_B, T を用いて表しなさい。また，この結果より，一様な外部磁場のもとにおかれた常磁性体について，高温領域における磁化の温度に対する依存性を説明しなさい。

IV

ハミルトニアン

$$H = -\vec{B}\cdot\vec{m}$$

で記述される量子系を考える。$\vec{B}$ は磁場，$\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ は磁気モーメントであり，$\vec{m} = \gamma\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ であるとする。ここで，γ は磁気回転比，$\hbar$ はプランク定数を 2π でわった量であり，$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ はパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。したがって，ハミルトニアンは２行２列の行列となる。このとき以下の問いに答えなさい。

問１ 時刻 t に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t)$$

に $\psi(t) = u\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$ を代入し，u が満たす方程式を H と E を用いて書きなさい。ただし，E は定数であり，u は時刻 t に依存しないベクトル

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

であるとする。

問２ $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とするとき，H を求めなさい。

問３ $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とするとき，H^2 を求めなさい。

問４ $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とするとき，H^2 の固有値を求めなさい。

以下では $\vec{B} = (B, 0, 0)$ (ただし B は定数) とし，時刻 $t = 0$ における波動関数 $\psi(0)$ が

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と与えられているとして，以下の問いに答えなさい。

問５ H の固有値とその固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい。ただし，固有ベクトルは大きさが１となるよう規格化して求めなさい。

問６ 時刻 t における波動関数 $\psi(t)$ を求めなさい。

問７ 時刻 t における m_z の期待値は $\psi^\dagger(t)m_z\psi(t)$ で与えられる。ただし，$\dagger$ はエルミート共役を意味する。問６の結果を用いてこれを求めなさい。

次に，問 7 の結果をハイゼンベルク表示を用いて確認する。ハイゼンベルク表示では $\vec{m}$ が時間依存し（以下これを $\vec{m}^{\mathrm{H}}(t)$ と書く），その時間発展は

$$m_a^{\mathrm{H}}(t) = \exp\left(i\frac{Ht}{\hbar}\right) m_a \exp\left(-i\frac{Ht}{\hbar}\right) \qquad (a = x, y, z) \tag{1}$$

によって記述されるとする。以下の問いに答えなさい。

問 8　式 (1) を用いて $m_z^{\mathrm{H}}(t)$ を求めなさい。さらにその結果を用いて，時刻 t における m_z の期待値 $\psi^\dagger(0) m_z^{\mathrm{H}}(t) \psi(0)$ を求めなさい。