I

問 1　形態 1 と形態 2 の状態にある棒の線密度をそれぞれ σ_1，σ_2 とすると，　$\sigma_1 = \dfrac{M}{\ell}$,　$\sigma_2 = \dfrac{M}{n\ell}$

問 2　棒の重心を原点として，棒の長さ方向に x 軸をとると，　$I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \sigma_1 x^2 dx = \frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{M\ell^2}{12}$

問 3　I_2 も問 2 と同様に計算すると，　$I_2 = n^2\dfrac{M\ell^2}{12} = n^2 I_1$　となる。したがって，I_2 は I_1 の n^2 倍である。

問 4　形態変化の前後で角運動量が保存されるので，　$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$　の関係が満たされる。
したがって，　$\omega_2 = \dfrac{I_1}{I_2}\omega_1$

問 5　求める速さを v とすると，　$v = |x|\omega(t)$

問 6　求める抵抗力の大きさを dF とすると，　$dF = kvdx = k\omega(t)|x|dx$

問 7　$N = \displaystyle\int |x|dF = \int_{-\frac{n\ell}{2}}^{\frac{n\ell}{2}} k\omega(t)|x|^2 dx = k\omega(t)\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{n\ell}{2}}^{\frac{n\ell}{2}} = \frac{k\omega(t)}{12}(n\ell)^3$

問 8　$I_2\dfrac{d\omega(t)}{dt} = -N$

問 9　問 8 の運動方程式に問 7 の N の表式を入れて積分していく

$$I_2\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{k\omega(t)}{12}(n\ell)^3$$

ここで $a = \dfrac{k}{12I_2}(n\ell)^3$ として積分すると

$$\ln\omega(t) = -at + C \quad \rightarrow \quad \omega(t) = C'e^{-at}$$

$t = 0$ のとき，$\omega(0) = \omega_0$ より，$C' = \omega_0$

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{k}{12I_2}(n\ell)^3 t}$$

この式に $I_2 = n^2\dfrac{M\ell^2}{12}$ が代入されていてもよく，その場合は $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{kn\ell}{M}t}$

II

問 1

$$E = I(t)R + \frac{Q(t)}{C}$$

問 2

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) \text{ と問 1 より，} \qquad E = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

問 3　初期条件が $t = 0, Q(0) = 0$ より，問 2 の微分方程式を解くと

$$Q(t) = CE\left\{1 - \exp\left(-\frac{1}{CR}t\right)\right\}$$

問 4　求める電流 $I(t)$ は

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{1}{CR}t\right)$$

問 5　仕事 W は

$$W = Q(t)E = CE^2\left\{1 - \exp\left(-\frac{1}{CR}t\right)\right\}$$

問 6　ジュール熱 J は

$$J = \int_0^t I^2(t')Rdt' = \frac{1}{2}CE^2\left\{1 - \exp\left(-\frac{2}{CR}t\right)\right\}$$

問 7　W と J の差は問 5 と問 6 より，

$$W - J = \frac{1}{2C}\left[CE\left\{1 - \exp\left(-\frac{1}{CR}t\right)\right\}\right]^2 = \frac{1}{2C}\{Q(t)\}^2$$

これはコンデンサーに蓄えられたエネルギーに等しい。

問 8　$Q(t)$ の変化を記述する微分方程式は ($I(t)$ を用いずに書くと)

$$\frac{Q(t)}{C} + L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = 0$$

問 9　初期条件が $t = 0$ で $I(0) = 0, Q(0) = Q_0$ より，問 8 の微分方程式を解くと

$$Q(t) = Q_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}, \qquad I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

問 10　全エネルギー U は下式となる。

$$U = \frac{1}{2}LI(t)^2 + \frac{1}{2C}Q(t)^2$$

問 9 より，$I(t)$ と $Q(t)$ を代入し，$U = \frac{1}{2C}Q_0^2$ を得る。よって，時間によらず一定。

III

問1　1粒子のエネルギーは磁場に平行（上向き）のとき $-\mu H$，反平行（下向き）のとき μH だから，

$$
\begin{aligned}
U &= -\mu H \times \frac{N+n}{2} + \mu H \times \frac{N-n}{2} \\
&= -n\mu H
\end{aligned}
$$

問2　ボルツマンの関係式を用いてエントロピーを計算する。微視的状態数 W は全粒子数 N 個から上向き $\frac{N+n}{2}$ 個を選ぶ組み合わせの数である。

$$
\begin{aligned}
S &= k_B \log W \\
&= k_B \log \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)!\left(\frac{N-n}{2}\right)!} \\
&\simeq k_B \left[N\log N - N - \tfrac{N+n}{2}\log\left(\tfrac{N+n}{2}\right) + \tfrac{N+n}{2} - \tfrac{N-n}{2}\log\left(\tfrac{N-n}{2}\right) + \tfrac{N-n}{2}\right] \\
&= k_B \left[N\log N - \frac{N+n}{2}\log\left(\frac{N+n}{2}\right) - \frac{N-n}{2}\log\left(\frac{N-n}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

２行目から３行目の変形は，スターリングの公式を用いた。

問3　エントロピー S を内部エネルギー U で微分すると逆温度となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T} &= \frac{dn}{dU}\cdot\frac{dS}{dn} \\
&= -\tfrac{1}{\mu H}\cdot k_B N\left[-\tfrac{1}{2N}\log\left(1+\tfrac{n}{N}\right) + \tfrac{1}{2N}\log\left(1-\tfrac{n}{N}\right)\right]
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\frac{1}{k_B T} = \frac{1}{2\mu H}\log\left(\frac{N+n}{N-n}\right)
$$

問4　前問と問1の結果より，n を消去して U について解くと，

$$
U = -N\mu H \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)
$$

グラフは以下の通り。

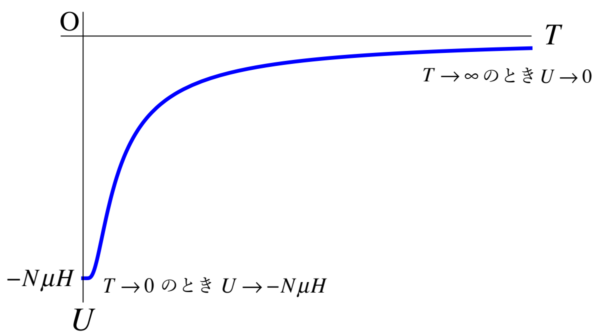

図 3.1

問 5

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\partial U}{\partial T} \\
&= -N\mu H \frac{d}{dT} \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) \\
&= -N\mu H \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)} \cdot \left(-\frac{\mu H}{k_B T^2}\right) \\
&= N k_B \left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)}
\end{aligned}
$$

グラフは以下の通り。

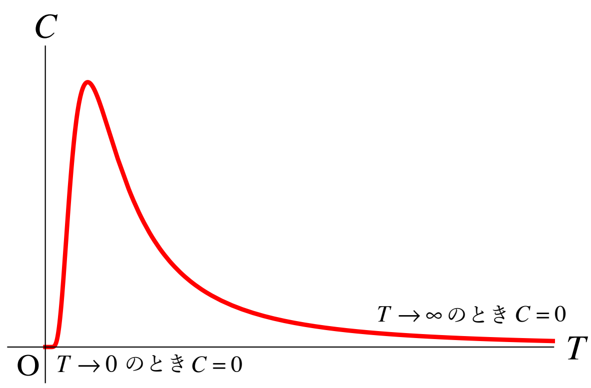

図 3.2

問 6　問 1 と問 4 の結果を等しいとおき，n について解く。

$$
\begin{aligned}
n &= N \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) \\
&\simeq \frac{N\mu H}{k_B T}
\end{aligned}
$$

ここで，問題文に与えられている近似式を用いた。

問 7　系全体の磁気モーメントを計算する。磁気モーメント μ である上向きの粒子の個数 $\frac{N+n}{2}$ 個，$-\mu$ である下向きの粒子の個数 $\frac{N-n}{2}$ 個だから，

$$
\begin{aligned}
M &= \mu \frac{N+n}{2} - \mu \frac{N-n}{2} \\
&= \mu n \\
&\simeq \frac{N\mu^2 H}{k_B T}
\end{aligned}
$$

最後の式変形で問 6 の結果を用いた。本結果は一定の磁場のもとで磁化が温度に反比例するキュリーの法則を示している。

IV

問 1　u が満たす方程式を H と E を用いて表すと

$$Hu = Eu$$

問 2　H を 2 行 2 列の行列で表すと

$$H = -\frac{1}{2}\gamma\hbar \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

問 3　H^2 を 2 行 2 列の行列で表すと

$$H^2 = \left(\frac{1}{2}\gamma\hbar|\vec{B}|\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 4　H^2 の固有値は

$$\left(\frac{1}{2}\gamma\hbar|\vec{B}|\right)^2$$

問 5　固有値は $\pm\frac{1}{2}\gamma\hbar B$ である。固有値 $-\frac{1}{2}\gamma\hbar B$ に対応する規格化された固有ベクトルは

$$\frac{e^{i\alpha_1}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，固有値 $\frac{1}{2}\gamma\hbar B$ に対応する規格化された固有ベクトルは

$$\frac{e^{i\alpha_2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。ただし α_1 と α_2 は任意の実数であり，これらに特定の実数値を代入した答えも正解とする。

問 6　時刻 t における波動関数は

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\gamma Bt \\ i\sin\frac{1}{2}\gamma Bt \end{pmatrix}$$

問 7　求める期待値は

$$\frac{1}{2}\gamma\hbar\cos\gamma Bt$$

問 8　$m_z^{\mathrm{H}}(t)$ と求める期待値は

$$m_z^{\mathrm{H}}(t) = \frac{1}{2}\gamma\hbar(\sigma_z\cos\gamma Bt - \sigma_y\sin\gamma Bt)$$

$$\psi^\dagger(0)m_z^{\mathrm{H}}(t)\psi(0) = \frac{1}{2}\gamma\hbar\cos\gamma Bt$$