２０２２年度（１０月期）及び ２０２３年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程入学試験

数物科学専攻・数学コース

専門科目

（注　意）

1　問題冊子は指示があるまで開かないこと。

2　問題冊子は本文３ページ，答案用紙は４枚，下書き用紙は３枚である。

3　問題は全部で６問ある。その中から４問を選択して，１問につき１枚の答案用紙に解答せよ。その際，答案用紙の解答欄（横線の下）左上の［　］欄に解答する問題番号を記入すること。

4　解答はすべて答案用紙の解答欄に記入すること。答案用紙の裏を使ってもよいが，この場合は解答欄に裏を使うことを明記し，裏面においては上部（おもて面の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。

5　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること。

6　問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。

次の問題 [1] ～ [6] の中から 4 問を選択して解答せよ。

[1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。

(2) A の各固有値 λ に対する固有空間 $W_\lambda = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ と広義固有空間

$$\widetilde{W_\lambda} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \text{ある } m \geq 1 \text{ に対して } (A - \lambda E)^m \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

を求めよ。ただし，E は 3 次単位行列である。

(3) $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような 3 次の正則行列 P を一つ求めよ。

[2] 実数を成分にもつ 2 次正方行列のなす実ベクトル空間を V とする。そして，V の基底 $S = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ を

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。a を実数とする。V から V への写像 f を

$$f(X) = AX - XA, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) f は V から V への線形写像であることを示せ。

(2) V の基底 S に関する写像 f の表現行列を求めよ。

(3) f の像 $\operatorname{Im} f$ の次元が 2 となる a の範囲を求めよ。また，そのときの f の核 $\operatorname{Ker} f$ の次元と一組の基底を求めよ。

[3] 区間 $I=[a,b]$ について，関数 $f:I\to\boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能で，$f''(x)>0$ $(x\in(a,b))$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 f は狭義凸関数，つまり

$$f(tx+(1-t)y)<tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (x,y\in I,\ \ x\neq y,\ \ t\in(0,1))$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f(a)f(b)<0$ ならば $f(c)=0$ を満たす $c\in I$ はただ一つ存在することを示せ。

[4] $D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) 点 P_θ $(\cos\theta,\sin\theta-a\sin^3\theta)$ がすべての $0<\theta<\pi$ に対して D に含まれるような定数 a の条件を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ は存在しないことを示せ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を求めよ。

[5] 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ を考える。$R > 1$ とする。上半円 $C_1(R) : z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と実軸上の線分 $C_2(R) : -R \leq x \leq R$ をつないでできる単純閉曲線 $C(R)$ に反時計回りに向きをいれる。$C(R)$ によって囲まれた領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) D に含まれる $f(z)$ の極における留数を求めよ。

(2) 線積分 $\displaystyle\int_{C(R)} f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ の値を求めよ。

[6] 2 点集合 $Y = \{0, 1\}$ の部分集合の族 $\mathcal{O}_Y$ を

$$\mathcal{O}_Y = \{\emptyset,\ \{1\},\ Y\}$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $\mathcal{O}_Y$ は Y の位相であることを示せ。

(2) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は連結であることを示せ。

(3) 空でない位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ およびその部分集合 $A \subset X$ に対して，写像 $f : X \to Y$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

で定める。このとき，f が連続であるための必要十分条件は $A \in \mathcal{O}_X$ であることを示せ。

(4) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ はハウスドルフ空間でないことを示せ。