令和４年度（１０月期入学）及び令和５年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解 答 例**	
専 攻 名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　　（１／２）

採点においては解答のプロセスや記述の論理性も重視した。以下では，そのプロセスがわかる程度の略解を一つ示したが，異なる方針の解答もあり得る。また，具体的に解を求める問題では，解の表し方が以下とは異なる解答もあり得る。

[1] (1) 1.

(2) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -2c_1 \\ -2c_2 \end{pmatrix} \middle| \, c_1, c_2 \in \boldsymbol{R} \right\}$, $\widetilde{W_1} = \boldsymbol{R}^3$.

(3) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[2] (1) 線形写像の定義（$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2)$, $X_1, X_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$）に基づいて示す。

(2) V の基底 S に関する写像 f の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ となる。

(3) $\mathrm{Im}\, f$ の次元が 2 となる a の範囲は 0 を除く実数全体となる。線形写像の次元公式から，そのときの $\mathrm{Ker}\, f$ の次元は 2 である。$\mathrm{Ker}\, f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる。

[3] (1) $x,\ y \in I,\ x < y,\ 0 < t < 1$ について $z = tx + (1-t)y$ とおく。テイラーの定理から，ある $c_1,\ c_2 \in (x, y)$ に対して等式 $f(x) = f(z) + f'(z)(x - z) + \dfrac{f''(c_1)}{2}(x - z)^2$ と $f(y) = f(z) + f'(z)(y - z) + \dfrac{f''(c_2)}{2}(z - y)^2$ を得る。これらの等式と $f'' > 0$ と $t(x - z) + (1 - t)(y - z) = 0$ から求める不等式が従う。

(2) 中間値の定理から f の零点が開区間 (a, b) 内に存在する。f が異なる零点 $c,\ c' \in (a, b)$ $(c < c')$ を持つと仮定する。このとき，ある $t,\ t' \in (0, 1)$ が存在して $c = ta + (1 - t)c'$, $c' = t'c + (1 - t')b$ と表せる。(1) より $0 = f(c) < tf(a) + (1 - t)f(c') = tf(a)$, $0 = f(c') < t'f(c) + (1 - t')f(b) = (1 - t')f(b)$ を得るが，これは $f(a)f(b) < 0$ に反する。つまり，f の I 内の零点はただ一つである。

令和４年度（１０月期入学）及び令和５年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解 答 例**	
専 攻 名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　　（２ ／ ２）

[4] (1) $1-\cos^2\theta-(\sin\theta-a\sin^3\theta)^2 = a\sin^4\theta\,(2-a\sin^2\theta)>0$ が任意の $\theta\in(0,\pi)$ に対して成り立てばよいので，求める条件は $0<a<2$ となる。

(2) (1) より $0<a<2$ に対し $P_\theta\in D$ $(\forall\theta\in(0,\pi))$ であり，$\theta\to+0$ のとき $P_\theta\to(1,0)$ である。このとき，$\theta\to+0$ における極限 $f(P_\theta)\to\dfrac{1}{2\sqrt{2a}}$ が a の値で異なることから題意が示される。

(3) $D_n=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}\;\middle|\;x^2+y^2\le 1-\dfrac{1}{n}\right\}$ $(n\in\mathbf{N})$ とおくと，$\{D_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は D の近似増大列である。極座標変換を用いると $\displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ と求まる。よって，広義積分は収束し，その値は 2π となる。

[5] (1) $-\dfrac{3}{16}i.$

(2) 留数定理により $\displaystyle\int_{C(R)} f(z)\,dz=2\pi i\left(-\frac{3}{16}i\right)=\frac{3}{8}\pi$ である。

(3) $\displaystyle\int_{C(R)} f(z)\,dz = 2\int_0^R \frac{dx}{(x^2+1)^3}+\int_{C_1(R)} f(z)\,dz$ であり，$\displaystyle\left|\int_{C_1(R)} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \frac{|iRe^{i\theta}|}{|R^2e^{2i\theta}+1|^3}\,d\theta \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^3}\to 0$ $(R\to\infty)$ となるから，(2) の結果を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3}{16}\pi$ である。

[6] (1) 位相の定義（$\emptyset$, $Y\in\mathcal{O}_Y$, 和集合と共通部分に関する条件）を確認する。

(2) 位相空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が連結であるとは，開集合かつ閉集合は $\emptyset$ と Y のみであることをいう。 つまり，開集合 $\{1\}$ が閉集合でないことを示せばよい。

(3) $f: X\to Y$ が連続であるとは，$\mathcal{O}_Y$ の元の f による逆像が $\mathcal{O}_X$ に属することをいう。後は，この条件に $(Y,\mathcal{O}_Y)$ と f の定義を適用して題意を導けばよい。

(4) ハウスドルフ空間とは，任意の異なる 2 点が共通部分を持たない 2 つの開集合にそれぞれ含まれることをいう。この条件を Y の 2 点が満たさないことを示せばよい。