令和４年度（１０月期）及び令和５年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 問 題 用 紙		
専攻名	機械科学専攻，フロンティア工学専攻，電子情報通信学専攻，地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース	
試験科目名	数学	P.（１／１）

2022 年 8 月 23 日（火）9:00 – 10:00

[注意]　1. 問題 **I**, **II**, **III**, **IV** のうち，２題を選択して解答すること。

2. 解答は選択問題ごとに分けて，１題を１枚の答案用紙の表だけに書くこと。

3. 選択問題の番号を，各答案用紙左上の □ 内に記入すること。

I　問 1　次の微分方程式の一般解を求めよ。[ヒント：(4) は $x^\alpha y^\beta$ の形の積分因子をもつ。]

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x - 1$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = y^2$

(4) $(3xy + 2y^3)dx + (2x^2 + 4xy^2)dy = 0$

II　$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{A} = \left(3xy^2,\, xy,\, y+z\right)$ を考える。閉領域 D を

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + 1 \leqq z \leqq 5\}$$

とする。次の問いに答えよ。

問 1　ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ と回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ。

問 2　向き付けられた D の境界面を ∂D とする。∂D 上の面積分 $\displaystyle\iint_{\partial D} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ。ただし，$\boldsymbol{n}$ は D の外向きの単位法線ベクトルとする。

問 3　曲面 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + 1 = z\}$, 平面 $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y = 0\}$ とする。曲線 C を S と T の共通集合 $S \cap T$ に含まれる, 始点 $\mathrm{P}(0,0,1)$, 終点 $\mathrm{Q}(1,-1,3)$ を持つ曲線とする。このとき，曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。ただし，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を C の適当なパラメータ表示とする。

III　a, b を定数として，複素関数 $f(z) = \dfrac{az^2 + bz + 1}{z^2(z-1)^2} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} z\right)$ を考える。次の問いに答えよ。

問 1　a, b の値に応じて，複素平面上にある関数 $f(z)$ の特異点をすべて求めよ。

問 2　関数 $f(z)$ の各々の極における留数を計算せよ。

問 3　複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)\, dz$ の値が 0 であるような a, b の値の組を 1 つ求めよ。ただし積分路 $\{|z| = R\}$ $(R > 2)$ は複素平面の原点を中心とし半径が R の正に向き付けられた円である。

IV　$f(x) = \pi - 2x \ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$, $g(x) = x(\pi - x) \ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とする。

問 1　$f(x)$ に対するフーリエ正弦級数と $g(x)$ に対するフーリエ余弦級数をそれぞれ求めよ。

問 2　微分方程式 $y'' - 4y = g(x)$ $(0 < x < \pi)$ の解 $y(x)$ をフーリエ余弦級数の形で求めよ。