| 令和４年度（１０月期）及び令和５年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験<br>解答例 | | |
|---|---|---|
| 専攻名 | 機械科学専攻，フロンティア工学専攻，電子情報通信学専攻，地球社会基盤学専攻・社会基盤工学コース | |
| 試験科目名 | 数学 (公開用) | P.（１／１） |

I　問１ (1) 特性方程式 $\rho^2-\rho-2=(\rho+1)(\rho-2)$ より $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ ($C_1, C_2$ は任意定数)。

(2) 未定係数法より特殊解を $\eta=Ax+B$ とおくと $\eta=-x+1$ を得る。(1) で求めた余関数とあわせて $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-x+1$ ($C_1, C_2$ は任意定数)。

(3) $u=1/y$ とおくと $u'+2u=-1$ を得，$u=(C-e^{2x})/2e^{2x}$。よって $y=2e^{2x}/(C-e^{2x})$ ($C$ は任意定数)。

(4) $xy$ が積分因子になることから完全微分形 $(3x^2y^2+2xy^4)dx+(2x^3y+4x^2y^3)dy=0$ を得，一般解は $x^3y^2+x^2y^4=C$ ($C$ は任意定数)。

II　問１: $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=3y^2+x+1,\ \nabla\times\boldsymbol{A}=(1,0,y-6xy).$

問２: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\\z\end{pmatrix}$ を満たす円柱座標 $(r,\theta,z)$, $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi,\ z\in\mathbb{R})$, で座標変換すると

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=3y^2+x+1=3r^2\sin^2\theta+r\cos\theta+1$ である。

ガウスの発散定理より $\displaystyle\iint_{\partial D}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_D\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV=24\pi.$

問３: 曲線 $C$ のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(t)=(t,-t,2t^2+1)$, $(0\leqq t\leqq 1)$ で与えると，$C$ 上で $\boldsymbol{A}(t)=(3t^3,\ -t^2,\ 2t^2-t+1)$. $\boldsymbol{r}'(t)=(1,-1,4t)$. $\displaystyle\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt=\frac{15}{4}.$

III　問１: $z=0$ は $f(z)$ の１位の極。$a+b+1\neq 0$ ならば $z=1$ は $f(z)$ の２位の極。$a+b+1=0,\ b\neq -2$ ならば $z=1$ は $f(z)$ の１位の極。

問２: $\mathrm{Res}(f,0)=\dfrac{\pi}{2},\ \ \mathrm{Res}(f,1)=-(b+2).$

問３: 留数定理から $\displaystyle\left|\int_{|z|=R}f(z)\,dz\right|=2\pi\left|\frac{\pi}{2}-(b+2)\right|$ より，例えば $(a,b)=\left(0,\dfrac{\pi}{2}-2\right).$

IV　問１: $f(x)$ を奇関数拡張することにより，$\displaystyle f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m}\sin 2mx.$

$g(x)$ を偶関数拡張することにより，$\displaystyle g(x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos 2mx.$

問２: $\displaystyle y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ とし，項別微分と未定係数法より，

$$y(x)=-\frac{\pi^2}{24}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2(m^2+1)}\cos 2mx.$$