令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	機械科学専攻（一般選抜，外国人留学生特別選抜）
試験科目名	専門科目 ①材料力学－I（１／１１）

［解答例］

問１　$R'_A = P$･･･①，　$\lambda'_1 = (P \cdot 2L)/(2A \cdot E) = PL/(AE)$ ･･･②，　$\lambda'_2 = 0$ ･･･③

問２　$R''_A = Q$･･･④，　$\lambda''_1 = (Q \cdot 2L)/(2A \cdot E) = QL/(AE)$ ･･･⑤，

$\lambda''_2 = (Q \cdot 3L)/(A \cdot E) = 3QL/(AE)$ ･･･⑥

問３　$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda''_1 + \lambda''_2 = 0$ ･･･⑦

問４　②，③，⑤，⑥式を⑦式に代入　$PL + 4QL = 0$　→　$Q = -P/4$

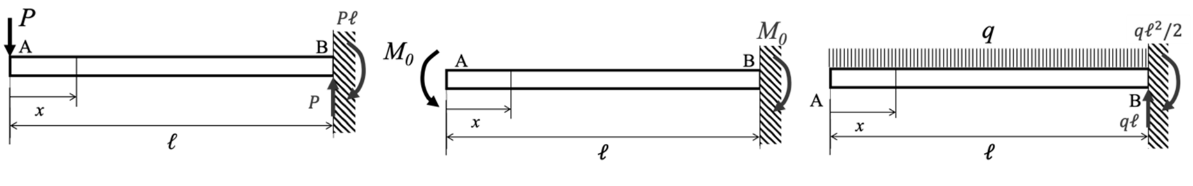
∴　$R_A = R'_A + R''_A = 3P/4$，　$R_B = Q = -P/4$，　$\lambda_1 = \lambda'_1 + \lambda''_1 = 3PL/(4AE)$

［解答例］

問１　力の釣り合いより　$R_{B1} = P$　モーメントの釣り合いより　$M_{B1} = P\ell$

問２　力の釣り合いより　$R_{B2} = 0$　モーメントの釣り合いより　$M_{B2} = M_0$

問３　力の釣り合いより　$R_{B3} = q\ell$　モーメントの釣り合いより　$M_{B3} = q\ell^2/2$



(1)　(2)　(3)

問４　はりの曲げモーメントは　$M = -\frac{1}{2}qx^2$

たわみの基礎式より　$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M = \frac{1}{2}qx^2$

重複積分法により　$EI\frac{dw}{dx} = \frac{1}{6}qx^3 + C_1$・・・①　$EIw = \frac{1}{24}qx^4 + C_1x + C_2$　・・・②

境界条件は　$x = \ell$　で　$\frac{dw}{dx} = 0, w = 0$　である。これを式①②に代入してC_1, C_2を求める。

$\frac{1}{6}q\ell^3 + C_1 = 0$　より　$C_1 = -\frac{1}{6}q\ell^3$

$\frac{1}{24}q\ell^4 + C_1\ell + C_2 = 0$　より$C_2 = -\frac{1}{24}q\ell^4 + \frac{1}{6}q\ell^4 = \frac{3}{24}q\ell^4 = \frac{1}{8}q\ell^4$

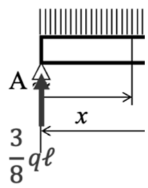
従って，式①より　$EI\theta = \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{6}q\ell^3$・・・③　式②より　$EIw = \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{6}q\ell^3x + \frac{1}{8}q\ell^4$・・・④

式③に$x = 0$を代入し　$\theta_{A3} = -\frac{1}{6EI}q\ell^3$　式④に$x = 0$を代入し　$w_{A3} = \frac{1}{8EI}q\ell^4$　が求まる。

問５　図２－１のはりで，P が逆向きに作用した場合，点Ａのたわみは　$w_{A1} = -\frac{1}{3EI}P\ell^3$

図２－３のはりにおける点Ａのたわみは 問４ の解答より　$w_{A3} = \frac{1}{8EI}q\ell^4$

図２－４のはりを図２－１と図２－３の重ね合わせとし，点 A のたわみがゼロとなる荷重 P を求める。即ち



$w_{A4} = w_{A1} + w_{A3} = 0$　より　$-\frac{1}{3EI}P\ell^3 + \frac{1}{8EI}q\ell^4 = 0$　・・・⑤

式⑤より P を求めると　$P = \frac{3}{8}q\ell$

支持点Ａにおける反力は，点 A でのたわみがゼロとなる荷重 P と等しいので，$R_{A4} = \frac{3}{8}q\ell$

問６　図２－１と図２－２のはりで，$-P$とM_0が作用した場合，点Ａのたわみは　$w_A = \frac{1}{2EI}M_0\ell^2 - \frac{1}{3EI}P\ell^3$

図２－３のはりにおける点Ａのたわみは 問４ の解答より　$w_{A3} = \frac{1}{8EI}q\ell^4$

図２－４のはりを図２－１，２－２，２－３の重ね合わせとし，点Ａのたわみがゼロになるとする。即ち

$w_{A4} = w_A + w_{A3} = 0$　より　$\frac{1}{2EI}M_0\ell^2 - \frac{1}{3EI}P\ell^3 + \frac{1}{8EI}q\ell^4 = 0$　から　$\frac{1}{2}M_0 - \frac{1}{3}P\ell + \frac{1}{8}q\ell^2 = 0$・・・⑥

また，図２－１と図２－２のはりで，$-P$とM_0が作用した場合，点Ａのたわみ角は　$\theta_A = -\frac{1}{EI}M_0\ell + \frac{1}{2EI}P\ell^2$

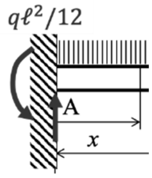
図２－３のはりにおける点Ａのたわみ角は 問４ の解答より　$\theta_{A3} = -\frac{1}{6EI}q\ell^3$

図２－４のはりを図２－１, 図２－２と図２－３の重ね合わせとし, 点Ａでのたわみ角がゼロになるとする。

$\theta_{A4} = \theta_A + \theta_{A3} = 0$　より　$-\frac{1}{EI}M_0\ell + \frac{1}{2EI}P\ell^2 - \frac{1}{6EI}q\ell^3 = 0$　から　$-M_0 + \frac{1}{2}P\ell - \frac{1}{6}q\ell^2 = 0$・・・⑦

令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	機械科学専攻（一般選抜，外国人留学生特別選抜）
試験科目名	専門科目 ①材料力学－II（３／１１）

式⑥⑦より P を消去すると　$\frac{3}{2}M_0 - P\ell + \frac{3}{8}q\ell^2 - 2M_0 + P\ell - \frac{1}{3}q\ell^2 = -\frac{1}{2}M_0 + \frac{1}{24}q\ell^2 = 0$



従って，$M_0 = \frac{1}{12}q\ell^2$

固定点Aにおける反モーメントは，たわみとたわみ角がゼロとなるモーメントM_0と等しいので，$M_{A5} = \frac{1}{12}q\ell^2$

問１　4 つのばねは並列に接続されているので，等価ばね定数は $4k$。したがって，固有角振動数は $\omega_n = \sqrt{\dfrac{4k}{M}}$ 。

問２　運動方程式は $(m+M)\ddot{x} = -4kx$ 。両辺 $m+M$ で割り整理すれば，$\ddot{x} + \dfrac{4k}{M+m}x = 0$ 。

問３　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{4k}{M+m}}$ 。

問４　おもりの初速を v_0，おもりが剛体ブロックに衝突する直前の速さを v とすると，$v^2 - {v_0}^2 = 2gl$ と表される。いまおもりを静かに落下させたためその初速 v_0 は 0。したがって $v = \sqrt{2gl}$ 。

問５おもりが衝突した直後の剛体ブロックの変位は $x(0) = -\dfrac{mg}{4k}$ である。また，そのときの剛体ブロックの速度 $\dot{x}(0)$ は，運動量保存則 $(M+m)\dot{x}(0) = mv$ より，$\dot{x}(0) = \dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gl}$ となる。よってこれらの初期値について運動方程式の解を求める。

問２で得た運動方程式の一般解は，$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$ であるから，$-\dfrac{mg}{4k} = A\cos\omega_n \cdot 0 + B\sin\omega_n \cdot 0$ となり，$A = -\dfrac{mg}{4k}$ 。また，$\dot{x} = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t$ より，$\dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gl} = -A\omega_n \sin\omega_n \cdot 0 + B\omega_n \cos\omega_n \cdot 0$ となり，$B\omega_n = \dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gl}$ ，$B = \sqrt{\dfrac{M+m}{4k}}\dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gl} = \sqrt{\dfrac{glm^2}{2k(M+m)}}$ 。

したがって，$x = -\dfrac{mg}{4k}\cos\omega_n t + \sqrt{\dfrac{glm^2}{2k(M+m)}}\sin\omega_n t$，ただし $\omega_n = \sqrt{\dfrac{4k}{M+m}}$ 。

問 1

おもりの半径方向速度は$\dot{x}$，円周方向速度は$(l+x)\dot{\theta}$なので，全運動エネルギは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(l+x)\dot{\theta}\right]^2$$

問 2

点 O を含む水平面からおもりまでの下向きの距離は$(l+x)\cos\theta$であるので，位置エネルギが 0 の点からおもりまでの高さは$l-(l+x)\cos\theta$となる．全ポテンシャルエネルギはばねのポテンシャルエネルギとおもりの位置エネルギの和なので

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mg[l-(l+x)\cos\theta]$$

問 3

問１，２よりラグランジュ関数は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(l+x)\dot{\theta}\right]^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mg[l-(l+x)\cos\theta]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left[m(l+x)^2\dot{\theta}\right] = 2m(l+x)\dot{\theta}\dot{x} + m(l+x)^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l+x)\sin\theta$$

ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

であるので，xについての運動方程式は，

$$m\ddot{x} - m(l+x)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + kx = 0$$

θについての運動方程式は，

$$2m(l+x)\dot{\theta}\dot{x} + m(l+x)^2\ddot{\theta} + mg(l+x)\sin\theta = 0$$

I　水平に置かれた半径 R の円管内における流体（密度 ρ，粘度 μ）の定常状態における層流流れについて以下の設問に答えなさい。ただし，図 1 に示すように流れの向き（左から右）を正として x 軸をとり，流れは完全に発達しているものとする。

問１　断面平均流速を U として体積流量 Q を求めなさい。

$$Q = \pi R^2 U$$

問２　図 1 に示すように円管と同心上に中心軸をもつ半径 r，長さ dx の微小な円柱状の流体要素を考える。微小流体要素の左右断面にはたらく圧力を p，$p+(dp/dx)dx$，円柱側面にはたらくせん断応力を τ（>0）として，次の(1)〜(3)に答えなさい。

(1)　微小円柱状流体要素にはたらく圧力による力の大きさ F_{p} を求めなさい。

$$F_p = \pi r^2 p - \pi r^2 \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right) = \pi r^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right) dx$$

(2)　微小円柱状流体要素にはたらくせん断応力による力の大きさ F_τ を求めなさい。

$$F_\tau = (2\pi r dx)\tau$$

(3)　(1)，(2)より，F_{p} と F_τ の力の方向を考慮して，せん断応力 τ を p，x，r で表しなさい。

$$\pi r^2 p - \pi r^2 \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right) - (2\pi r dx)\tau = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left(-\frac{dp}{dx}\right) r$$

問３　問２ (3)より，円管内の速度分布を $u(r)$とした場合の速度勾配(du/dr)を求めなさい。

ニュートンの粘性法則より

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right) r$$

問４　円管内の速度分布 $u(r)$を p，R，r，x，μ で表しなさい。

速度勾配を r で積分し、r=R で速度 u=0 の境界条件を用いると

$$u = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)(R^2 - r^2)$$

問５　長さ L の円管における圧力勾配が $\Delta p/L$ [=(-dp/dx)]であった。圧力差 Δp を μ，L，R，Q で表しなさい。

$$Q = \int_0^R \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)(R^2 - r^2)2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right) = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{L}$$

$$\therefore \Delta p = \frac{8\mu L}{\pi R^4}Q$$

問６　最大流速が発生する位置を答えなさい。さらに，最大流速 $u_{\max}$ を U で表しなさい。

最大流速は du/dr=0 の点で生じる。つまり r=0 で最大値を取る。

ゆえに問４の式に r=0 を代入すると

$$u_{\max} = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)R^2$$

また問５より

$$Q = \pi R^2 U = \int_0^R \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)(R^2 - r^2)2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\pi R^2}{2}u_{\max}$$

$$\therefore u_{\max} = 2U$$

II　図２—１のような摩擦が生じない車輪が付いた大きなタンクに水(密度 ρ)が入っている。水面から深さ H のタンク右側壁に出口直径 d の滑らかなノズルが設置されており，水平方向に水が流出している。ただし，空気の密度は水の密度に比べて無視でき，水面の高さ H は変化しないものとする。なお，タンクは大気圧中（ゲージ圧力 $p_0=0$）にあり，重力加速度を g として，以下の設問に答えなさい。

問１　タンク水面から深さ H の静止した水中の点 A におけるゲージ圧力 p_A を記号で表しなさい。

水面にかかるゲージ圧は０なので，深さ H での水圧は

$p_A=\rho gH$

となる。

問２　タンクの水面（点①）とノズル出口（点②）の間での同一流線上でのベルヌーイの式を書きなさい。ただし，点①の高さ z_1，流速 v_1，圧力 p_1 であり，点②の高さ z_2，流速 v_2，圧力 p_2 とする。ただし，ノズルから水が噴出する際の損失はないものとする。

同一流線上においてエネルギーが保存されることより，点①と②の間において

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

が成立する。

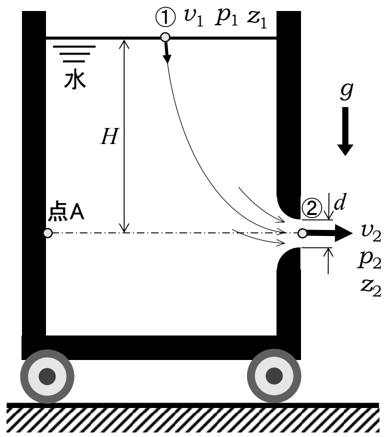


図２－１

問３　ノズルから噴出する水の流速 v_2 を記号で表しなさい。

タンクが大きいため，水面が変化しないことより，

$v_1=0$

タンクが大気中にあることより

$p_1=p_2=p_0=0$

ノズルの高さが H より

$z_1-z_2=H$

以上を，問２のベルヌーイの式に代入すると，

$$0+0+H=0+\frac{v_2^2}{2g}\qquad \therefore v_2=\sqrt{2gH}$$

問４　ノズルから噴出する水によってタンクが受ける力 F を記号で表しなさい。また，タンクは左右のどちらの方向に移動するか答えなさい。

図２－１の検査体積において，運動量の変化はノズル出口のみである。従って，水によってタンクが受ける力 F は，流量を Q とすると $Q=\frac{\pi d^2}{4}v_2$ であり，問３の v_2 を代入して整理すると

$$F=\rho Q(v_2-0)=\rho\cdot\frac{\pi d^2}{4}v_2\cdot v_2=\frac{\pi\rho d^2{v_2}^2}{4}=\frac{\pi\rho d^2\cdot 2gH}{4}=\frac{\pi\rho g d^2 H}{2}$$

となる。なお，タンクは，左方向に移動する。

令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	機械科学専攻（一般選抜，外国人留学生特別選抜）
試験科目名	専門科目 ③流れ学－II（９／１１）

問５　図２―１のノズル出口直径を $d/2$ に小さくした場合，噴出する水によってタンクが受ける力は，問４の何倍になるか答えなさい。

ノズル出口直径が $d/2$ と小さくなっても，問３のように深さが同じであるため，噴出する水の速度 v_2 は変わらない。一方，ノズルの面積が小さくなるため流量が減少する。よって，流量は

$$Q=\frac{\pi(d/2)^2}{4}v_2=\frac{\pi d^2}{16}v_2$$

したがって，噴出する水によってタンクが受ける力 F' は

$$F'=\rho Q(v_2-0)=\rho\cdot\frac{\pi d^2}{16}v_2\cdot v_2=\frac{\pi\rho d^2{v_2}^2}{16}=\frac{1}{4}F$$

従って，１／４倍になる。

問６　図２－２のようにタンク左側壁に出口直径 $3d/4$ のノズルを新たに設けた。タンクが移動しないためには，タンク左側壁のノズルを水面からどれだけの深さ h に設置しなければならないか答えなさい。なお，タンク右側壁のノズル高さを H とし，タンクは噴出する水による力で浮き上がらないものとする。

タンクが移動しないためには，２つのノズルによる力が等しくなる必要がある。従って，

$$F=F''$$

$$\rho Qv_2=\rho Qv_3$$

$$\frac{\pi\rho gd^2H}{2}=\rho\cdot\frac{\pi\,(3d/4)^2}{4}v_3\cdot v_3$$

$$\frac{\pi\rho gd^2H}{2}=\rho\cdot\frac{\pi\,(3d/4)^2}{4}\cdot 2gh$$

$$\frac{\pi\rho gd^2H}{2}=\frac{9\pi\rho gd^2h}{32}$$

$$h=\frac{16}{9}H\approx 1.78H$$

h は，H よりも 1.78 倍深いところにノズルを設置する必要がある。

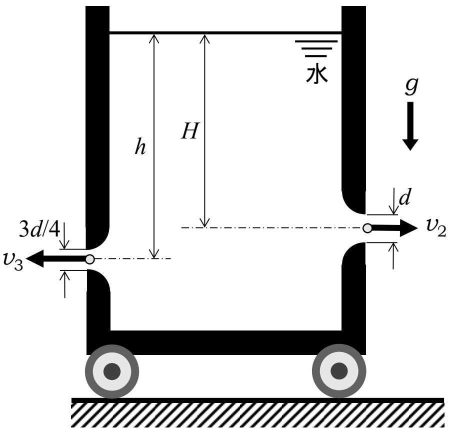


図２－２

令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	機械科学専攻（一般選抜，外国人留学生特別選抜）
試験科目名	専門科目 ④熱力学－I（１０／１１）

I

問１

定圧比熱：$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$ [J/(kg·K)]

問２

仕事 L [J]は，$L = \int_{V_1}^{2V_1} p_0 dV = p_0(2V_1 - V_1) = p_0 V_1$ [J]

問３

気体の質量 m [kg]は，$m = \frac{p_0 V_1}{R T_0}$ [kg]

加熱終了後の気体の圧力，体積，温度をp' [Pa]，V' [m^3]，T' [K]とすると

$\frac{p_0 V_1}{T_0} = \frac{p'V'}{T'} = \frac{3p_0 \times 2V_1}{T'} = \frac{6p_0 V_1}{T'}$ より，$T' = 6T_0$ [K]

内部エネルギーの変化量ΔU [J]は，$\Delta U = \frac{mR}{\kappa - 1}\Delta T = \frac{5mR}{\kappa - 1}T_0 = \frac{5mR}{\kappa - 1} \times \frac{p_0 V_1}{mR} = \frac{5p_0 V_1}{\kappa - 1}$ [J]

よって加熱量 Q [J]は，

$Q = \Delta U + L = \frac{5p_0 V_1}{\kappa - 1} + p_0 V_1 = \frac{(\kappa + 4)p_0 V_1}{\kappa - 1}$ [J]

問４

エントロピーの変化量$\varDelta S$ [J/K]は，

$$\Delta S = m\Delta s = m\left\{c_p \ln\left(\frac{T'}{T_0}\right) - R\ln\left(\frac{p'}{p_0}\right)\right\} = m\left\{c_p \ln\left(\frac{6T_0}{T_0}\right) - R\ln\left(\frac{3p_0}{p_0}\right)\right\}$$

$$= m\left\{\frac{\kappa R}{\kappa - 1}\ln(6) - R\ln(3)\right\} = \frac{mR}{\kappa - 1}\{\kappa \ln(2) + \ln(3)\} = \frac{p_0 V_1}{(\kappa - 1)T_0}\{\kappa \ln(2) + \ln(3)\} \text{ [J/K]}$$

問５

加熱終了後の内部エネルギー，エントロピーを U' [J]，S' [J/K]とし，周囲と温度，圧力が等しい平衡状態の内部エネルギー，エントロピー，体積を U_0 [J]，S_0 [J/K]，V_0 [m^3]とすると

$E = (U' - U_0) - T_0(S' - S_0) + p_0(V' - V_0)$ [J]

したがって，

$E = \frac{5p_0 V_1}{\kappa - 1} - \frac{p_0 V_1}{\kappa - 1}\{\kappa \ln(2) + \ln(3)\} + p_0 V_1 = \frac{p_0 V_1}{\kappa - 1}\{\kappa + 4 - \kappa \ln(2) - \ln(3)\}$ [J]

令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解　答　例	
専　攻　名	機械科学専攻（一般選抜，外国人留学生特別選抜）
試験科目名	専門科目 ④熱力学－II（１１／１１）

II

問１　(a) 燃焼：2→3　(b) 断熱圧縮：1→2　(c) 吸気：5→1

問２　過程 1→2 は断熱であるため$TV^{\kappa-1}=$一定である．ゆえに，$T_2=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}T_1=6^{1.5-1}T_1=\sqrt{6}\,T_1$

問３　過程 2→3 は等圧であるため $\frac{T}{V}=$一定である．ゆえに，$T_3=\frac{V_3}{V_2}T_2=2T_2=2\sqrt{6}\,T_1$

問４　熱が加えられるのは等圧変化の過程 2→3 のみであるため，$Q_H=mc_p(T_3-T_2)$となる．
問２，３の温度を用いて$Q_H=m\frac{\kappa}{\kappa-1}R\sqrt{6}\,T_1=mR\frac{1.5}{0.5}\sqrt{6}\,T_1=3\sqrt{6}p_1V_1$

問５　熱が排出されるのは等積変化の過程 4→1 のみであるため，1 サイクルで排出される熱量は
$Q_L=mc_v(T_4-T_1)$となる．

さらに，熱効率は $\eta=\frac{L}{Q_H}=1-\frac{Q_L}{Q_H}$で求められるため，

$\eta=1-\frac{Q_L}{Q_H}=1-\frac{mc_v(T_4-T_1)}{mc_p(T_3-T_2)}=1-\frac{T_{\boxed{4}}-T_{\boxed{1}}}{1.5\left(T_{\boxed{3}}-T_{\boxed{2}}\right)}$ が得られる．

問６　加熱過程は S が増加，冷却過程では減少，断熱過程では変化しないことを考慮すれば以下になる．
1：<u>b</u>，2：<u>c</u>，3：<u>d</u>，4：<u>a</u>