令和3年度 (10月期入学) 及び 令和4年度
金沢大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験
数物科学専攻計算科学コース

専門科目

注意事項

1. 問題冊子は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文10ページであり，答案用紙は4枚，下書用紙は1枚である。
3. 数学 (I〜IV) と基礎物理 (V〜VIII) と計算機 (IX, X) の3分野の中から2分野以上の問題4問を選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。
4. 1問につき1枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面においては上部 (表の横線の上に相当する部分) は使用しないこと。
5. 問題冊子と下書用紙は持ち帰ること。

I

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

問１ $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ の範囲における $y = \sin x$ の逆関数を，$x = \mathrm{Sin}^{-1}\, y$ とする。極限

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ。

問２ 極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\right)^{n}$$

を求めよ。

問３ 実数 $r_n > 0$ と $\theta_n \in (0, \pi/2)$ が，任意の自然数 k に対して，以下の方程式を満たしている。

$$r_n \cos((k+1)\theta_n) = \cos(k\theta_n) - \frac{1}{n}\sin(k\theta_n),$$
$$r_n \sin((k+1)\theta_n) = \sin(k\theta_n) + \frac{1}{n}\cos(k\theta_n).$$

このとき，極限 $\lim_{n\to\infty}(r_n)^n$ および，$\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ。

II

以下の問いに答えよ。

問１　$0 < m < n$ を満たす偶数 m, n に対して，積分

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) dx$$

を求めよ。

問２ 関数

$$f(x) = \max\left\{\sin(x+y) \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\right\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

の最小値を求めよ。

III

ある会社の社員は全員，毎日コーヒーまたはお茶のどちらか一方だけを必ず飲む。コーヒーを飲んだ社員のうち，その 1/5 の社員は翌日もコーヒーを飲み，お茶を飲んだ社員のうち，その 3/5 の社員は翌日もお茶を飲む。ある日（これを０日目とする）に，コーヒーを飲んだ社員の割合は x_0，お茶を飲んだ社員の割合は y_0 であったとする。ここで，$x_0, y_0 \geq 0, x_0 + y_0 = 1$ である。同様に，その日から数えて n 日目にコーヒーを飲む社員の割合を x_n，お茶を飲む社員の割合を y_n とする。ここで，$x_n, y_n \geq 0, x_n + y_n = 1$ である。新たな入社や退職はなく，社員数は十分多くいつも割合は正確であるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

問１　列ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を，$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ を用いて表せ。

問２　x_n, y_n を，x_0, y_0 を用いて表せ。また，$\lim_{n\to\infty} x_n$ および $\lim_{n\to\infty} y_n$ が存在するかどうか調べ，存在する場合はその極限値を求めよ。

IV

n を自然数とする。n 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\langle x, y\rangle$ とする。すなわち，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ である。零ベクトルでない $v \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，線形写像 $f_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$f_v(x) = x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v$$

で定める。また，M_v を，$f_v(x) = M_vx$ となる n 次正方行列とする。このとき，以下の問いに答えよ。

問１ $n = 3$ のとき，$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする。3 次正方行列 M_{v_1}，M_{v_2} を求め，それらの行列の階数を答えよ。

問２ I_n を n 次単位行列とする。零ベクトルでない任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について，$M_v^2 = I_n$ を示せ。

問３ 零ベクトルでない任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について，M_v は直交行列であることを示せ。

V

３次元空間の原点を中心とした xy 平面上で円運動をしている質点について考える。時刻 $t(\geq 0)$ における質点の位置は，$x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$, $z = 0$ と表される。R, ω は正の定数であり，周期は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ で与えられる。以下の問 1-問 6 に答えよ。

問 1 時刻が $t = 0$ から T になるまでの間で位置の y 成分が最大になる時刻を求めよ。

問 2 質点の速度ベクトルの成分を求めよ。

問 3 時刻が $t = 0$ から T になるまでの間で速度の x 成分が最大になる時刻を求めよ。

問 4 速度ベクトルと位置ベクトルの成す角度を求めよ。

問 5 質点の加速度ベクトルの成分を求めよ。

問 6 速度ベクトルと加速度ベクトルの成す角度を求めよ。

３次元空間内の xy 平面上で運動する質点の質量が m で，原点に質量 M の質点が固定されている系を考える。質点間には万有引力が働いており，万有引力定数を G とする。以下の問 7，問 8 に答えよ。

問 7 質点が原点を中心として半径 R の円軌道を運動する場合を考える。質点の速さを G, R, M を用いて求めよ。

問 8 質点が楕円運動する場合を考える。質点の軌道と x 軸の $x > 0$ での交点を $x = R$, $x < 0$ での交点を $x = -R'$ とする。$x = R$ での質点の速度が v を正として $\boldsymbol{v} = (0, v, 0)$ で与えられるとき，$R > R'$ となる v の範囲を G, R, M を用いて求めよ。

VI

真空中に２本の十分に長い導線を図のように平行に置く。導線１は x 軸上にあり，電流 $\boldsymbol{I}_1 = (I_1, 0, 0)$ が流れている。導線２は導線１から見て $-z$ 方向に距離 r だけ離れた地点で電流 $\boldsymbol{I}_2 = (-I_2, 0, 0)$ が流れている。ただし，導線の太さは無視し，I_1 と I_2 は正値とする。真空の透磁率を μ_0 とし，原点を点 O，点 P を $(0, 0, -r)$ とする。以下の問 1-問 5 に答えよ。

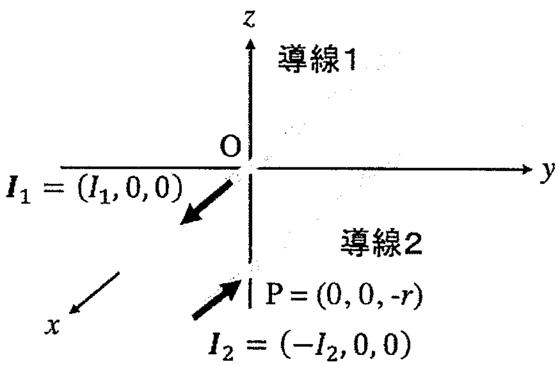
問１　導線２が原点 O に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$ を求めよ。

問２　導線１が導線２から受ける単位長さ当たりの力 $\boldsymbol{F}_1$ を求めよ。

問３　導線１が点 P に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}_2$ を求めよ。

問４　導線２が導線１から受ける単位長さ当たりの力 $\boldsymbol{F}_2$ を求めよ。

問５　導線１を固定しながら導線２を $+z$ 方向に $\dfrac{r}{2}$ だけ近づける時に必要な単位長さ当たりの仕事 W を求めよ。



図

VII

x 軸の負側からポテンシャル $V(x)$ 中に入射した，エネルギー $E(>0)$ をもつ質量 m の粒子の一次元運動を考える。換算プランク定数を $\hbar$，波動関数を $\psi(x)$ とすると，時間に依存しないシュレディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)$$

である。x 軸の正方向に進む波を進行波，x 軸の負方向に進む波を後退波と呼ぶ。全ての領域 x において $V(x)=0$ の場合について以下の問 1，問 2 に答えよ。

問 1　時間に依存しないシュレディンガー方程式から，粒子の波動関数を求めよ。波動関数は規格化しなくてよい。

問 2　粒子の運動量の期待値を求めよ。

次に，$V(x)$ が以下で与えられる場合を考える。

$$V(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \quad 領域\,(\mathrm{I}) \\ V_0 & (0<x) \quad 領域\,(\mathrm{II}) \end{cases}$$

ここで，V_0 は E 未満の正の定数である。$k_1=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, k_2=\dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ を用いて以下の問 3-問 6 に答えよ。

問 3　領域 (I) と領域 (II) における波動関数の一般解を示せ。波動関数は規格化しなくてよい。

問 4　領域 (I) の進行波と後退波の確率密度の流れ j_+^{I} と j_-^{I} から反射率 $R=\dfrac{|j_-^{\mathrm{I}}|}{|j_+^{\mathrm{I}}|}$ を求めよ。波動関数 $\psi(x)$ の確率密度の流れは，$\dfrac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\dfrac{d\psi}{dx}-\psi\dfrac{d\psi^*}{dx}\right)$ より計算される。

問 5　領域 (I) の進行波の確率密度の流れ j_+^{I} と領域 (II) の進行波の確率密度の流れ j_+^{II} から透過率 $T=\dfrac{|j_+^{\mathrm{II}}|}{|j_+^{\mathrm{I}}|}$ を求めよ。

問 6　$T+R$ の値を求めよ。

令和３年度 (１０月期入学) 及び令和４年度金沢大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学試験 問 題 用 紙		
専攻名	数物科学専攻 (計算科学コース) (一般選抜)	
試験科目名	専門科目 基礎物理	P. 8／10

VIII

n 個の輪をつなげて作った一次元の鎖について考える。図のように，鎖は x 軸上に並び，鎖の一端を始点とし，他端を終点とする。始点は原点に固定されており，終点の座標を X とする。図の矢印が示すように，それぞれの輪が $+x$ 方向か $-x$ 方向のどちらかを向くことで，鎖は折りたたまれたり，伸びたりする。$+x$ 方向に伸びる輪の数を n_+，$-x$ 方向に伸びる輪の数を n_-，全ての輪の x 軸方向の長さを a とする。すなわち，$X = (n_+ - n_-)a$ とかける。ボルツマン定数を k_{B}，温度を T として，以下の問いに答えよ。

問 1 輪の並べ方に対する場合の数 W を n，n_+，n_- を用いて表せ。

$n \gg 1$，$n_+ \gg 1$，$n_- \gg 1$ であり，n，n_+，n_- を連続変数とみなして，以下の問 2-問 6 に答えよ。

問 2 エントロピー S は $S = k_{\mathrm{B}} \log W$ で与えられる。自然数 N に対して，$N \gg 1$ のとき，$\log N! = N \log N - N$ と近似できる。これを用いてエントロピー S を求めよ。

問 3 エントロピーが最大となるときの n_+ を求めよ。

問 4 n_+，n_- を n，a，X を用いて表せ。

問 5 鎖の長さを X に保つために必要な張力 f は，問 2 で求めたエントロピー S を用いて，$f = -T\dfrac{\partial S}{\partial X}$ とかける。張力 f を n，a，X を用いて表せ。

問 6 実数 y に対して $y \ll 1$ のとき，$\log(1+y) = y$ と近似できる。これを用いると，$\dfrac{X}{na} \ll 1$ のとき，問 5 で求めた張力は $f = cX$ とかける。c を求めよ。

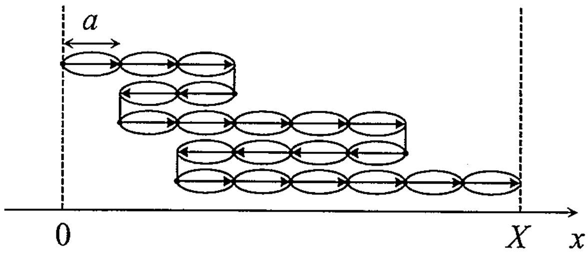


図: $n_+ = 14$，$n_- = 6$ の一例

IX

整数係数多項式 $f(x) = x^{13} + 3x^7 - 2x^5 + 7x^4 - 1$, $g(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ に対し，$f(x)$ を $g(x)$ で割った余りを画面に出力するプログラムを，C 言語または Fortran で書け。ただし，入力は整数 a_1, a_2, a_3 とし，整数演算のみで計算すること。また整数は桁あふれしないと仮定してよい。

X

正方領域 $0 \leq x < 1$，$0 \leq y < 1$ に一様に分布する点を考えると，これらの点が原点を中心とした半径 1 の円内（円周を含まない）に入る確率は $\pi/4$ となる。0 以上 1 未満の一様乱数を使って座標 (x, y) を発生させれば，乱数によって発生させた点のうち半径 1 の円内に入る点の割合は発生させる点数が増加するにつれて，次第に $\pi/4$ に近づくはずである。この考え方を用いて 200 万個の座標を発生させ，円周率 π を近似的に求めた結果を標準出力に書き出すプログラムを Fortran または C 言語で作成せよ。ただし，返り値として浮動小数点数を返す関数 random() は半開区間 $[0, 1)$ における一様な擬似乱数をなすとし，それを用いよ。また，random() を N 回繰り返し実行したとき，その返り値の列 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ は半開区間 $[0, 1)$ における一様な擬似乱数をなすと思ってよい。