解答 I

問 1 $x = \mathrm{Sin}^{-1}(\frac{1}{n})$ とおく。このとき，$\frac{1}{n} = \sin x$ で，$n \to \infty$ のとき，$x \to 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

問 2 $\lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{1}{n}) = 1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\log(1+\tfrac{1}{n})\right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

問 3 三角関数の加法公式

$$\begin{aligned}\cos((k+1)\theta_n) &= \cos(k\theta_n)\cos(\theta_n) - \sin(k\theta_n)\sin(\theta_n),\\ \sin((k+1)\theta_n) &= \sin(k\theta_n)\cos(\theta_n) + \cos(k\theta_n)\sin(\theta_n),\end{aligned}$$

より，

$$\begin{pmatrix}\cos(k\theta_n) & -\sin(k\theta_n)\\ \sin(k\theta_n) & \cos(k\theta_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_n\cos\theta_n\\ r_n\sin\theta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(k\theta_n) & -\sin(k\theta_n)\\ \sin(k\theta_n) & \cos(k\theta_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix}$$

となり，両辺にある行列が正則行列なので，$r_n\cos\theta_n = 1$, $r_n\sin\theta_n = \frac{1}{n}$ となる。両式の 2 乗を足すと, $(r_n)^2 = 1 + \frac{1}{n^2}$ となるので，$r_n > 0$ より，

$$r_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

である。一方，

$$\theta_n = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{nr_n}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right)$$

となる。よって，

$$\lim_{n\to\infty}(r_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{2n}\left(n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\} = \exp(0) = 1.$$

一方，$m = \sqrt{n^2+1}$ とおくと，問 1 より，

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right) = \lim_{m\to\infty} m\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) = 1.$$

解答 II

問 1 変数変換 $y = \pi/x$ と部分積分によって，

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) dx &= \frac{1}{\pi^2} \int_{m\pi}^{n\pi} y \sin y \, dy \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left([-y \cos y]_{m\pi}^{n\pi} + \int_{m\pi}^{n\pi} \cos y \, dy \right) \\
&= \frac{1}{\pi^2} (-n\pi \cos(n\pi) + m\pi \cos(m\pi)) = \frac{m-n}{\pi}.
\end{aligned}
$$

問 2 $f(-\pi/2)$ の値を求めると，

$$
f(-\pi/2) = \max_{y \in [-3\pi/4, -\pi/4]} \sin(y) = \sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

となる。この $-1/\sqrt{2}$ が f の最小値であることを示す。

$$
A = \{2k\pi + x : k \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi/4, 5\pi/4]\}
$$

とおくと，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，ある $z \in [-\pi/4, \pi/4]$ が存在し，$x + z \in A$ となるので，

$$
f(x) = \max_{y \in [-\pi/4, \pi/4]} \sin(x+y) \geq \sin(x+z) \geq \min_{a \in A} (\sin a) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.
$$

したがって，

$$
\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.
$$

解答 III

問 1

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

問 2 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

A^n を計算する。A の固有値は $1, -\frac{1}{5}$ である。それぞれの固有ベクトルは，例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と取れる。よって，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$. ゆえに $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix}$. したがって，$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を用いて，

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{5})^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix}.$$

これより，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

となるので，$n \to \infty$ のとき，$\{x_n\}, \{y_n\}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_0 + y_0 \\ 2(x_0 + y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ここで、$x_0 + y_0 = 1$ を用いた。よって，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{2}{3}.$$

解答 IV

問 1

$$f_{v_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad f_{v_1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f_{v_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

より，$M_{v_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ となる。また，

$$f_{v_2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix},\quad f_{v_2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix},\quad f_{v_2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

より，$M_{v_2}=\begin{pmatrix}2/3&-2/3&1/3\\-2/3&-1/3&2/3\\1/3&2/3&2/3\end{pmatrix}$ となる。また，$\mathrm{rank}(M_{v_1})=\mathrm{rank}(M_{v_2})=3.$

問 2 $f_v\circ f_v=\mathrm{id}$ を示せばよい。実際，任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{aligned}f_v\circ f_v(x)&=f_v\Big(x-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big)\\&=\Big(x-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big)-2\frac{\Big\langle\Big(x-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big),v\Big\rangle}{\langle v,v\rangle}v\\&=x-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v+4\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\\&=x.\end{aligned}$$

問 3 直交行列であるためには，任意の $x,y\in\mathbb{R}^n$ について，$\langle M_vx,M_vy\rangle=\langle x,y\rangle$, つまり $\langle f_v(x),f_v(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ を示せば十分である。実際に

$$\begin{aligned}\langle f_v(x),f_v(y)\rangle&=\Big\langle x-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v,y-2\frac{\langle y,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big\rangle\\&=\langle x,y\rangle-2\frac{\langle x,v\rangle\langle y,v\rangle}{\langle v,v\rangle}-2\frac{\langle x,v\rangle\langle y,v\rangle}{\langle v,v\rangle}+4\frac{\langle x,v\rangle\langle y,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\\&=\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

(注) f_v は v を法ベクトルとした超平面についての鏡映であるため，このことを用いた別解でもよい。

解答 V

問 1 $y = R\sin\omega t$ より，$t = \frac{1}{4}T$.

問 2 $v_x = \dfrac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t$, $v_y = \dfrac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t$.

問 3 $v_x = -R\omega\sin\omega t$ より，$t = \frac{3}{4}T$.

問 4 $(x, y, 0)\cdot(v_x, v_y, 0) = 0$ より，90 度 (もしくは 270 度).

問 5 $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -R\omega^2\sin\omega t$.

問 6 $(v_x, v_y, 0)\cdot(a_x, a_y, 0) = 0$ より，90 度 (もしくは 270 度).

問 7 円運動では，遠心力と万有引力がつりあうため，$mv^2/R = GMm/R^2$ より，$v = \sqrt{GM/R}$.

問 8 $x = -R'$ での速度を正の v' を用いて $\boldsymbol{v}' = (0, -v', 0)$ として，$\boldsymbol{R} = (R, 0, 0)$，$\boldsymbol{R}' = (-R', 0, 0)$ であるから，角運動量保存則 $\boldsymbol{R}'\times m\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}\times m\boldsymbol{v}$ より，$(0, 0, R'mv') = (0, 0, Rmv)$.
エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mv'^2 - \dfrac{GMm}{R'} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{R}$.
R' について解いて，$R' = \dfrac{R}{\dfrac{2GM}{Rv^2} - 1}$ となり，$R' < R$ となる v の範囲は $v < \sqrt{GM/R}$.

解答 VI

問 1 アンペールの法則より

$$\vec{B_1} = \mu_0 \vec{H_1} = \mu_0 \frac{\vec{I_2} \times \vec{r}}{2\pi r^2}$$

と書ける。ただし，$\vec{r} = (0, 0, r)$ である。従って

$$\vec{B_1} = \left(0, \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}, 0\right).$$

問 2 単位長さ当たりのローレンツ力より

$$\vec{F_1} = \vec{I_1} \times \vec{B_1} = \left(0, 0, \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r}\right).$$

問 3 問 1 と同様にして，

$$\vec{B_2} = \left(0, \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}, 0\right).$$

問 4 問 2 と同様にして，

$$\vec{F_2} = \vec{I_2} \times \vec{B_2} = \left(0, 0, -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r}\right).$$

問 5 導線の微小変位を $d\vec{r} = (0, 0, dr)$ とすると，仕事 W は

$$W = \int_r^{r/2} d\vec{r} \cdot \vec{F_2} = -\int_r^{r/2} dr \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \log 2.$$

解答 VII

問１ 一般解は A_1, A_2 を定数として $\psi(x) = A_1 e^{i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x} + A_2 e^{-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x}$. 問題文の条件から，$A_2 = 0$ となるため $\psi(x) = A_1 e^{i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x}$.

問２ 前問で求めた $\psi(x)$ は運動量の固有状態であり，運動量の期待値は $\sqrt{2mE}$.

問３ 解答例として，B_1, B_2, C_1, C_2 を定数とすると，領域 (I) と (II) の波動関数はそれぞれ，$\psi_{\mathrm{I}} = B_1 e^{ik_1x} + B_2 e^{-ik_1x}$, $\psi_{\mathrm{II}} = C_1 e^{ik_2x} + C_2 e^{-ik_2x}$.　ただし，$C_2 = 0$ とした場合の解答も正解とする。

問４ 領域 (II) は進行波しかなく $C_2 = 0$. $x = 0$ での接続条件から，$B_1 + B_2 = C_1$, $k_1(B_1 - B_2) = k_2 C_1$ を得る。これより，$B_1 = \dfrac{k_1 + k_2}{2k_1} C_1, B_2 = \dfrac{k_1 - k_2}{2k_1} C_1$.　また，$j_+^{\mathrm{I}} = \dfrac{\hbar}{m} k_1 |B_1|^2, j_-^{\mathrm{I}} = -\dfrac{\hbar}{m} k_1 |B_2|^2$ より $R = \dfrac{|B_2|^2}{|B_1|^2} = \dfrac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$.

問５ 前問と同様に，$j_+^{\mathrm{II}} = \dfrac{\hbar}{m} k_2 |C_1|^2$ より，$T = \dfrac{k_2 |C_1|^2}{k_1 |B_1|^2} = \dfrac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$.

問６ 問４と問５より，　$T + R = 1$.

解答 VIII

問 1 n 個のうち，n_+ 個が右向き，n_- 個が左向きであるので，配列の数 W は

$$W = {}_n\mathrm{C}_{n_+} = \frac{n!}{n_+!n_-!} = \frac{(n_+ + n_-)!}{n_+!n_-!}$$

となる。

問 2 エントロピーは $S = k_\mathrm{B} \log W$ より，

$$S = k_\mathrm{B}(n \log n - n_+ \log n_+ - n_- \log n_-)$$

とかける。

問 3 $\dfrac{\partial S}{\partial n_+} = 0$ より，$n_+ = \dfrac{1}{2}n$ が得られる。

問 4 $n_+ + n_- = n$ および，$(n_+ - n_-)a = X$ より，

$$n_+ = \frac{1}{2}(n + \frac{X}{a}), \quad n_- = \frac{1}{2}(n - \frac{X}{a})$$

とかける。

問 5 エントロピー S を n，a，X を用いて表すと，

$$S = nk_\mathrm{B}\left\{\log 2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{na}\right)\log\left(1 + \frac{X}{na}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{na}\right)\log\left(1 - \frac{X}{na}\right)\right\}$$

となる。これより張力 f は

$$f = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{1 + \frac{X}{na}}{1 - \frac{X}{na}}$$

となる。

問 6 $\log\dfrac{1 + \frac{X}{na}}{1 - \frac{X}{na}} = 2\dfrac{X}{na}$ となるので，

$$f = \frac{k_\mathrm{B}T}{na^2}X$$

より，

$$c = \frac{k_\mathrm{B}T}{na^2}$$

となる。

解答 IX

Fortran 版

```
      integer f(0:13)
      integer g(0:3)
      integer d,lm,i
      f=0
      f(13)=1
      f(7)=3
      f(5)=-2
      f(4)=7
      f(0)=-1
      g(3)=1
      read(*,*) (g(i),i=2,0,-1)
      d=13
      do while(d .ge. 3)
         lm=f(d)
         do i=0,3
            f(i+d-3) = f(i+d-3) - lm*g(i)
         enddo
         do while ((d .ge. 0) .and. (f(d) .eq. 0))
            d=d-1
         enddo
      enddo
      write(*,*) 'r=(',f(2),')*x^2+(',f(1),')*x+(',f(0),')'
      end
```

出力結果

```
$ ./rem_f
2 -3 -4
 r=(      -31969 )*x^2+(       18114 )*x+(       50087 )
```

解答 IX（続き）
C 言語版

```
#include <stdio.h>
#define DF 13
#define DG 3
int f[DF+1]={0};
int g[DG+1]={0};
void read_poly() {
    int i;
    f[13]=1; f[7]=3; f[5]=-2; f[4]=7; f[0]=-1; g[DG]=1;
    for(i=DG-1; i>=0; i--) {
        scanf("%d",&g[i]);
    }
}
void rem_poly() {
    int d=DF,lm,i;
    while(d>=DG) {
        for(lm=f[d],i=0; i<=DG; i++) {
            f[i+d-DG] -= lm*g[i];
        }
        for(; d>=0 && f[d]==0; d--) {
        }
    }
}
void print_poly() {
    printf("r=(%d)*x^2+(%d)*x+(%d)\n",f[2],f[1],f[0]);
}
int main() {
    read_poly();
    rem_poly();
    print_poly();
    return 0;
}
```

出力結果

```
$ ./rem_c
2 -3 -4
r=(-31969)*x^2+(18114)*x+(50087)
```

解答 X

解答例として，Fortran によるプログラムの例を挙げる。

```
integer i,hit,sample
real x,y,pi
parameter(sample=2000000)
hit=0
do i=1,sample
x=random()
y=random()
if (x*x+y*y.lt.1.0) hit=hit+1
end do
pi=4.0*real(hit)/real(sample)
write(*,*) 'pi=',pi
stop
end
```