令和3年度（10月期）及び令和4年度　金沢大学大学院自然科学研究科 **博士前期課程入学試験**	
専攻名	**数物科学専攻（物理学コース）** **（一般選抜・外国人留学生特別選抜）**
試験科目名	専門科目
	問題は４問であり，全ての問題に解答してください。
問題用紙等枚数	問題用紙　計　７　枚（この表紙は含まない） 答案用紙　計　４　枚 下書き用紙　計　４　枚
試験日程	令和３年８月２４日（火）実施

〔全般的な解答に際しての注意事項〕

・試験開始直後に，問題用紙等が上記指定の枚数のとおりあるか確認してください。

・すべての答案用紙に「志願専攻」及び「受験番号」を記入してください。なお，氏名はどこにも書いてはいけません（書いた場合は，不正行為とみなします）。

・問題用紙・下書き用紙は，各自持ち帰っても差し支えありません。

〔専攻別注意事項〕

・１問につき１枚の答案用紙で解答し，答案用紙には問題番号を明記すること。

・必要であれば答案用紙の裏面を使っても良い。ただし，「裏に続く」と明記すること。また，裏面においても上から約 8cm の部分（表面の受験番号等記入欄に対応する部分）は解答に使用しないこと。

I

図1のように，質量が無視できる長さ ℓ の糸にぶら下がった質量 m のおもりを考える。この糸の一端は，座標 $(x_0, 0)$ の点Pにつながっており，糸はたわまず，おもりは x-y 平面上で運動するものとする。下向きの鉛直方向と糸のなす角を θ とし，重力加速度の大きさを g とする。ポテンシャルエネルギーの基準は，おもりの最下点とする。

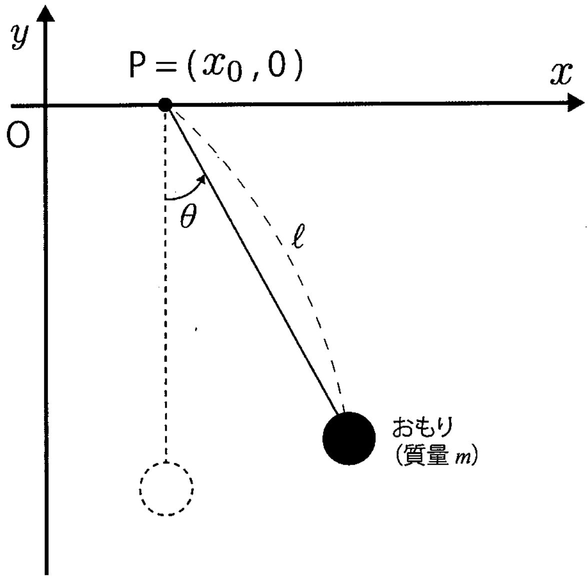

図1

問1　おもりの座標 (x, y) を x_0, ℓ, θ を用いて表しなさい。

点Pは x 軸上で固定されている (x_0 は時間によらず一定) として，以下の問いに答えなさい。

問2　$\dot{x}, \dot{y}$ を $x_0, \ell, \theta, \dot{\theta}$ のうちから必要なものを用いて，それぞれ表しなさい。
ただし，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}, \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}, \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ とする。

問3　おもりの運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を $x_0, m, \ell, g, \theta, \dot{\theta}$ のうちから必要なものを用いて，それぞれ求めなさい。

問4　運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を用いて，この系のラグランジアンを求めなさい。解答には T, U を用いてもよい。

問5　問4で求めたラグランジアンを用いて，θ についての運動方程式を求めなさい。

次に，点Pの位置は座標 $(x_0(t), 0)$ のように，時間 t に依存して x 軸上を動くとして，以下の問いに答えなさい。

問6　この系のラグランジアンを求めなさい。

問7 θ がじゅうぶん小さいとき ($|\theta| \ll 1$ とし, $\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1$ と近似できる), θ についての運動方程式を求めなさい。

問8 $x_0(t) = A\sin\omega t$ であるとき，問7で求めた運動方程式を用いて $\theta(t)$ を求めなさい。初期条件として $t = 0$ のとき，$\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ とする。また，A と ω は時間によらない定数であり，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ としたとき $\omega \neq \omega_0$ とする。解答には ω_0 を用いてもよい。

II

真空中のマクスウェル方程式は，電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{H}$，磁束密度 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$，電束密度 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ を用いて

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$$

と書かれる。真空中の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とする。

問 1　z 方向に伝搬する電磁波の電場が位置 $\boldsymbol{r}$，時刻 t の関数として $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(k_z z - \omega t)$ と書かれるとする。$\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$ は x-y 平面内のベクトル (定数)，ω は角振動数 (定数)，k_z は波数 (定数) である。次の式を計算しなさい。

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$

(2) $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$

(3) $\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$

問 2　問 1 の場合に rot (rot $\boldsymbol{E}$) を計算することにより k_z と ω の関係を求めなさい。必要であれば，下の公式を用いてもよい。

$$\boldsymbol{X} \times (\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Z}) - (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}$$

問 3　電磁波の位相速度を ε_0 と μ_0 を用いて表しなさい。

次に，図 2 のように x-z 平面に対して平行に，$y = d$ と $y = -d$ の位置にじゅうぶん大きい 2 枚の完全導体でできた導体板を真空中に置く。導体板の間の空間を z 方向に伝搬する電磁波について，板の端の効果を無視して考える。電磁波は導体板の面上で板面に平行な電場の成分がゼロという境界条件を満たす。

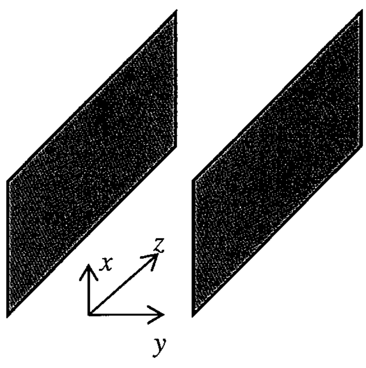

図 2

$\boldsymbol{E}_0$ が y 成分のみをもつならば，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(k_z z - \omega t)$ は解である。$\boldsymbol{E}_0$ が x 成分のみの場合，板面に平行な電場が存在するのでこの式はこのままでは解とはならない。そこで，$\boldsymbol{E}_0$ が x 成分のみだが y-z 平面で z 軸に対して斜めに伝搬する 2 つの電場の合成 $\boldsymbol{E}_C$ を考える。

$$\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \{\sin(k_y y + k_z z - \omega t) + \sin(-k_y y + k_z z - \omega t)\}$$

ただし，$k_y > 0$ とする。

問 4　$\boldsymbol{E}_C$ を構成するそれぞれの電場も導体板の間では真空中の電磁波の電場である。k_y, k_z と ω の関係を ε_0 と μ_0 を用いて表しなさい。

問 5　$\boldsymbol{E}_C$ が導体板上で境界条件を満たすとき，最小の k_y を求めなさい。必要であれば，下の公式を用いてもよい。

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

問 6　ある角振動数以下では，z 方向に電磁波は進まない。この角振動数を求めなさい。

III

問 1 エネルギー E_n の量子状態 n $(n=0,1,2,\cdots)$ をもつ系が，熱浴と接して温度 T の熱平衡状態にあるときのエネルギーの平均値 $\bar{E}$ を考える。

(1) 平均エネルギー $\bar{E}$ は，ボルツマン定数 k_B，$\beta = \dfrac{1}{k_BT}$，系の状態和 (分配関数) $Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{E_n}{k_BT}\right]$ を用いて

$$\bar{E} = -\frac{d}{d\beta}\boxed{\quad\text{(i)}\quad}$$

で表される。空欄 (i) に入るべき式を，次の選択肢から最も適切な記号を 1 つ選んで答えなさい。

(a) Z　　(b) $\log Z$　　(c) $\dfrac{1}{Z}$　　(d) $\dfrac{\log Z}{Z}$

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F と温度 T を用いて平均エネルギー $\bar{E}$ が

$$\bar{E} = -T^2 \frac{d}{dT}\left(\frac{F}{T}\right)$$

で表されることを示しなさい。

問 2 角振動数が ω である 1 次元調和振動子を量子力学的に考える。量子状態 n のエネルギー固有値 ϵ_n は，ゼロ点エネルギーを無視すると

$$\epsilon_n = n\hbar\omega \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

と表される。ここで，$\hbar$ はプランク定数 h を用いて $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ と定義される。この 1 次元調和振動子が熱浴と接して温度 T の熱平衡状態にあるとする。

(1) この系の状態和 Z を計算しなさい。必要であれば，初項 a，公比 r(ただし $0<|r|<1$) の無限等比級数の和が $\dfrac{a}{1-r}$ であることを用いてもよい。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F を計算しなさい。

(3) エネルギー平均値 $\bar{E}$ を $\hbar, k_B, \omega, T$ のうちから必要なものを用いて表しなさい。

問 3 1 辺が L の立方体の空洞内に満たされた電磁波を考える。電磁波は壁と相互作用して温度 T の熱平衡状態にあるとする。空洞の壁での境界条件を満たす電磁波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ は，3 つの整数 n_x, n_y, n_z を用いて

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$$

と表される。

(1) 各々の波数ベクトルに対して独立な 2 つの偏光があることに注意すると，1 つの $\boldsymbol{k}$ に対して 2 つの量子力学的な調和振動子が対応する。波数空間において，波数ベクトルの大きさ $(k=|\boldsymbol{k}|)$ が k から $k+dk$ の球殻にある振動子の数が $\dfrac{L^3}{\pi^2}k^2\,dk$ となることを示しなさい。

(2) 角振動数が ω から $\omega+d\omega$ の領域にある電磁波の単位体積あたりの振動子の数を $D(\omega)\,d\omega$ としたとき，$D(\omega)$ を光速 c と ω を用いて表しなさい。

(3) 温度 T における角振動数 ω をもつ振動子のエネルギー平均値は問 2(3) で導いた式で表される。このことを用いて，角振動数が ω から $\omega + d\omega$ の領域にある電磁波の単位体積あたりのエネルギーを $\epsilon(\omega)\, d\omega$ とすると

$$\epsilon(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}$$

で表されることを示しなさい。

(4) 波長が λ から $\lambda + d\lambda$ の領域にある単位体積あたりのエネルギーを $u(\lambda)\, d\lambda$ としたとき，電磁波の波長 λ が $\lambda \gg \dfrac{hc}{k_B T}$ の極限で $u(\lambda)$ は波長の何乗に比例するか答えなさい。また，$u(\lambda)$ を k_B, h, c, T, λ のうちから必要なものを用いて表しなさい。

IV

中心力ポテンシャル $V(r)$ 中の質量 M の粒子を考える。粒子の軌道角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}$ は，粒子の座標演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}$ と運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ を用いて $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義され，演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ は極座標 (r, θ, ϕ) とプランク定数 h $\left(\hbar = \dfrac{h}{2\pi}\right)$ を用いて次のように表される。

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right), \qquad \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

また，ラプラシアン ∇^2 は，$\hat{\boldsymbol{L}}$ を用いて次のように表される。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{\hbar^2 r^2}$$

以下の問いに答えなさい。

問１　この粒子のハミルトニアン $\hat{H}$ をラプラシアン ∇^2 とポテンシャル $V(r)$ を用いて表しなさい。

問２　$\hat{\boldsymbol{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ について固有値 $\ell(\ell+1)\hbar^2$ と $m\hbar$ を持つ同時固有関数を $Y(\theta,\phi)$ とすると，固有値方程式は以下のように表される。

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y(\theta,\phi), \qquad \hat{L}_z Y(\theta,\phi) = m\hbar Y(\theta,\phi)$$

エネルギー E を持つ粒子の波動関数を $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ と表すことにより，$R(r)$ の満たす微分方程式を求めなさい。

問３　半径 a の球内に閉じ込められた粒子が $\ell = 0$ の状態にあるとする。ただし，球内では $V(r) = 0$ である。$R(r) = \dfrac{\chi(r)}{r}$ とおくと，$\chi(r)$ は $\chi(0) = 0$ を満たさなければならないことを説明しなさい。

問４　問３の粒子のエネルギー固有値を求めなさい。

問５　$\ell = 0$ のときには $Y(\theta,\phi)$ は定数となる。このことを用いて，問３の粒子の規格化された波動関数 $\psi(r,\theta,\phi)$ を求めなさい。

問６　空間反転演算子 $\hat{\mathcal{P}}$ は $\hat{\mathcal{P}}\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\mathcal{P}}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{r}}$ により定義され，空間反転演算子 $\hat{\mathcal{P}}$ の $Y(\theta,\phi)$ への作用は $\hat{\mathcal{P}}Y(\theta,\phi) = Y(\theta',\phi') = cY(\theta,\phi)$ と表される。θ' と ϕ' を θ と ϕ を用いて表しなさい。

問７　問６の c について $c = \pm 1$ となることを示しなさい。