I

問1　おもりの座標：$(x, y) = (x_0 + \ell \sin\theta, -\ell\cos\theta)$

問2　おもりの速度：$(\dot{x}, \dot{y}) = (\ell\cos\theta \cdot \dot{\theta}, \ell\sin\theta\cdot\dot{\theta})$

問3　運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2, \\
U &= mg\ell(1-\cos\theta)
\end{aligned}
$$

問4　系のラグランジアン L は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$$

もしくは，$L = T - U$ だけでも良い。

問5　$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ より $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$。よって，$\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta$

問6　この場合のおもりの速度は $(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x_0} + \ell\cos\theta\cdot\dot{\theta}, \ell\sin\theta\cdot\dot{\theta})$ となり，運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2\ell\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{x_0} + \dot{x_0}^2)$$

また，U は問3のものと同じであるから，この系のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2\ell\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{x_0} + \dot{x_0}^2) - mg\ell(1-\cos\theta)$$

問7　$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ と近似式より $\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta - \dfrac{\cos\theta}{\ell}\ddot{x_0} \simeq -\dfrac{g}{\ell}\theta - \dfrac{\ddot{x_0}}{\ell}$

問8　前問の微分方程式に，$x_0 = A\sin\omega t$ を代入すると下式が得られる。

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + \frac{\omega^2 A}{\ell}\sin\omega t$$

ただし，$\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ である。上式は強制振動の式なので，初期条件を入れて解くと下式が得られる。

$$\theta(t) = \frac{A\omega^3}{\ell\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2)}\sin\omega_0 t + \frac{A\omega^2}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega t$$

II

問 1 (1)　$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0$

(2)　$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を x, y, z 方向の単位ベクトルとして

$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = k_z(-\boldsymbol{e}_x E_{0y} + \boldsymbol{e}_y E_{0x})\cos(k_z z - \omega t)$

あるいは

$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = k_z \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}_0 \cos(k_z z - \omega t)$

(3)　$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{E}_0 \sin(k_z z - \omega t) = -\boldsymbol{E}_0 k_z^2 \sin(k_z z - \omega t)$

問 2 与えられた公式とマクスウェル方程式を使うと

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{B} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

これに電場の式を代入することにより $k_z^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$ となることがわかる。

問 3 位相速度：$\dfrac{\omega}{k_z} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

問 4 k_y, k_z と ω の関係：$k_z^2 + k_y^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$

問 5 与えられた公式を用いると $\boldsymbol{E}_C$ は

$$\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0\{\sin(k_y y + k_z z - \omega t) + \sin(-k_y y + k_z z - \omega t)\} = 2\boldsymbol{E}_0 \sin(k_z z - \omega t)\cos k_y y$$

境界条件 ($y = \pm d$ で $\boldsymbol{E}_C = 0$) を要請すると

$$k_y = \frac{1}{d}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \qquad \text{ただし}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

という条件式が導かれる。このときの最小値は $k_y = \dfrac{\pi}{2d}$ である。

問 6 角振動数がある値より小さいと，k_z が虚数になり電磁波は z 方向へ進行しない。問 4 と問 5 の結果を用いると，最小の k_y で決まる ω は

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\pi}{2d}$$

III

問 1　(1)　(b) $\log Z$

(2)　$F = -k_B T \log Z$ であるから

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{F}{T}\right) = -k_B \frac{d}{dT}\log Z = -k_B \frac{d\beta}{dT}\frac{d}{d\beta}\log Z = \frac{1}{T^2}\frac{d}{d\beta}\log Z$$

上式を問 1(1) の結果に代入することにより

$$\bar{E} \quad = \quad -T^2 \frac{d}{dT}\left(\frac{F}{T}\right)$$

問 2　(1)　$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\epsilon_n/(k_B T)] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \exp[-n\hbar\omega/(k_B T)] = \dfrac{1}{1 - \exp[-\hbar\omega/(k_B T)]}$

(2)　$F = -k_B T \log Z = k_B T \log(1 - \exp[-\hbar\omega/(k_B T)])$

(3)　問 1(2) と問 2(2) を用いて

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -T^2 \frac{d}{dT}\left(\frac{F}{T}\right) = -T^2 \frac{d}{dT}\left(k_B \log(1 - \exp[-\hbar\omega/(k_B T)])\right) \\ &= \hbar\omega \frac{\exp[-\hbar\omega/(k_B T)]}{1 - \exp[-\hbar\omega/(k_B T)]} = \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/(k_B T)] - 1}\end{aligned}$$

問 3　(1)　3 次元波数空間における球殻の微小体積 $4\pi k^2 dk$ を考えると，波数空間における振動子の数密度は $2 \cdot \frac{L^3}{(2\pi)^3}$ であるから，振動子の数は $2 \cdot \dfrac{L^3}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi k^2 dk = \dfrac{L^3}{\pi^2} k^2 dk$ となる。

(2)　題意より，$L^3\, D(\omega)\, d\omega = \dfrac{L^3}{\pi^2} k^2 dk$。また，$ck = \omega$ より $c\, dk = d\omega$ であるから，

$$D(\omega)\, d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\, d\omega \Longrightarrow D(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

(3)　題意より，$\epsilon(\omega)\, d\omega = \bar{E} \cdot D(\omega) d\omega = \dfrac{\hbar}{\pi^2 c^3} \dfrac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}\, d\omega$。よって，

$$\epsilon(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}$$

(4)　$\dfrac{c}{\lambda} = \nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ を用いると，$\lambda \gg hc/(k_B T)$ は $\hbar\omega/(k_B T) \ll 1$ となる。また，問 3(3) の結果に対して $e^x \sim 1 + x \quad (0 < x \ll 1)$ の近似式を用いると

$$\epsilon(\omega)\, d\omega \quad \sim \quad \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2\, d\omega$$

さらに，$\omega = 2\pi c/\lambda$，　$|d\omega| = (2\pi c/\lambda^2)|d\lambda|$ であるから，

$$u(\lambda)\, d\lambda = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{(2\pi c)^2}{\lambda^2} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda^2}\, d\lambda = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4}\, d\lambda \quad \propto \lambda^{-4}$$

よって，$u(\lambda)$ は λ のマイナス 4 乗に比例することがわかる。

IV

問 1　$\hat{H} = \dfrac{1}{2M}\hat{\boldsymbol{p}}^2 + V(r) = -\dfrac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(r)$

問 2　シュレディンガー方程式は下式のように書ける。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2Mr^2}\hat{\boldsymbol{L}}^2 + V(r)\right]R(r)Y(\theta,\phi) = ER(r)Y(\theta,\phi)$$

これに，$\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y(\theta,\phi)$ を使うと

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2} + V(r)\right]R(r)Y(\theta,\phi) = ER(r)Y(\theta,\phi)$$

角度依存部分は $Y(\theta,\phi)$ に限られることから，両辺を $Y(\theta,\phi)$ で割ることにより

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2} + V(r)\right]R(r) = ER(r)$$

問 3　波動関数が規格化可能であるためには $r=0$ で $R(r)$ は有限でなくてはならない。このためには $\chi(0)=0$ が必要である。

問 4　$r<a$ での $R(r)$ が満たす方程式は $-\dfrac{\hbar^2}{2Mr^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)R(r) = ER(r)$ となる。
$R(r) = \dfrac{\chi(r)}{r}$ とおくと，$\chi(r)$ の満たす微分方程式は $\dfrac{d^2}{dr^2}\chi(r) = -\dfrac{2ME}{\hbar^2}\chi(r)$ となり，その一般解は
$\chi(r) = A\sin\left(\dfrac{\sqrt{2ME}}{\hbar}r\right) + B\cos\left(\dfrac{\sqrt{2ME}}{\hbar}r\right)$ となる。
境界条件として $\chi(0)=0$ を課すと，$B=0$ となることがわかる。また，$\chi(a)=0$ より，n を自然数として $\dfrac{\sqrt{2ME}}{\hbar}a = n\pi$ が得られる。これより，エネルギー固有値は $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2Ma^2}$ となる。

問 5　$Y(\theta,\phi)$ は定数なので波動関数は A を規格化定数として $\psi(r,\theta,\phi) = \dfrac{A}{r}\sin\left(\dfrac{\sqrt{2ME}}{\hbar}r\right)$ と書ける。
定数 A を決める規格化条件は $\displaystyle\int \psi^2(r,\theta,\phi)r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi = 4\pi\int_0^a \chi^2(r)dr = 1$ となり，
$2\pi a A^2 = 1$ が得られる。問 4 のエネルギー固有値を使うと，波動関数は $\psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi a}}\dfrac{1}{r}\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}r\right)$。

問 6　$\theta' = \pi - \theta$，$\phi' = \phi + \pi$。

問 7　空間反転を 2 回繰り返すと元に戻るから $\hat{\mathcal{P}}^2 = 1$ で $c^2 = 1$。これより，$c = \pm 1$。