２０２１年度（１０月期）及び ２０２２年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程入学試験

数物科学専攻・数学コース

専門科目

（注　意）

1　問題冊子は指示のあるまで開かないこと。

2　問題冊子は本文３ページ，答案用紙は４枚，下書き用紙は３枚である。

3　問題は全部で６問ある。その中から４問を選択して，１問につき１枚の答案用紙に解答せよ。その際，答案用紙の解答欄（横線の下）左上の［　］欄に解答する問題番号を記入すること。

4　解答はすべて答案用紙の解答欄に記入すること。どうしても必要ならば答案用紙の裏を使ってもよいが，この場合は裏に続けることを明記し，裏面においては上部（おもて面の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。

5　白紙の答案用紙でも，受験番号を記入して提出すること。

6　問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。

次の問題 [1] ～ [6] の中から４問を選択して解答せよ。

[1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。

(2) A の各固有値 λ に対する固有空間 $W_\lambda = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ と広義固有空間

$$\widetilde{W}_\lambda = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \text{ある } m \geq 1 \text{ に対して } (A - \lambda E)^m\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

を求めよ。ただし，E は３次単位行列である。

(3) $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような３次の正則行列 P を求めよ。

[2] x を変数とする高々２次の実係数多項式からなる実ベクトル空間を V とする。V から V への写像 T を

$$T(f)(x) = (3x+2)^2 f\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) T は V から V への線形写像であることを示せ。

(2) V の基底 $S = \{x^2, x, 1\}$ に関する写像 T の表現行列を求めよ。さらに，T が線形同型であることを示せ。

(3) $p_k(x) = (2x+1)^{2-k}(3x+2)^k$ $(k = 0, 1, 2)$ とする。$B = \{p_0, p_1, p_2\}$ が V の基底であることを示し，B に関する T の表現行列を求めよ。

[3] 以下の問いに答えよ。

(1) I を $\boldsymbol{R}$ 内の区間とするとき，関数 $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ が一様連続であることの定義を述べよ。

(2) 微分可能な関数 $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $|f'(x)| \leq 1$ を満たすとき，f は一様連続であることを示せ。

(3) 区間 $I = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ 上で定義された関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は一様連続でないことを示せ。

[4] $\alpha > 0$ とする。$\boldsymbol{R}^2$ 上の2変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha > 1$ のとき，f が原点 $(0,0)$ で連続であることを示せ。

(2) 偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) f が原点で全微分可能となるための，必要かつ十分条件であるような α の範囲を求めよ。

[5] 以下の問いに答えよ。

(1) α を 0 でない複素数とするとき，関数 $H(z) = \dfrac{\alpha}{\alpha - z}$ の原点 $z = 0$ におけるベキ級数展開およびその収束半径を求めよ。

(2) 領域 $D \subset \boldsymbol{C}$ を $D = \left\{ z \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$ とする。連続関数 $f\colon [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ に対して，複素関数 $F\colon D \to \boldsymbol{C}$ を

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta} d\theta$$

とするとき，$F(z)$ の原点 $z = 0$ におけるベキ級数展開を求めよ。

[6] 自然数全体の集合を $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする。$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ 上の関数 d を

$$d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \qquad (n, m \in \boldsymbol{N})$$

とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 d は $\boldsymbol{N}$ 上の距離関数であることを示せ。

(2) $a_n = n\ (n \in \boldsymbol{N})$ とする。距離空間 $(\boldsymbol{N}, d)$ において，点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ。

(3) 距離空間 $(\boldsymbol{N}, d)$ は完備でないことを示せ。