令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解 答 例**	
専 攻 名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　　(１／２)

採点においては解答のプロセスや記述の論理性も重視した。以下では，そのプロセスがわかる程度の略解を一つ示したが，異なる方針の解答もあり得る。また，具体的に解を求める問題では，解の表し方が以下とは異なる解答もあり得る。

[1] (1)　1, 2。

(2)　$W_1 = \langle {}^t(1,1,0)\rangle$, $W_2 = \langle {}^t(-1,-1,1)\rangle$, $\widetilde{W_1} = \langle {}^t(1,1,0), {}^t(-2,-1,2)\rangle$, $\widetilde{W_2} = W_2$.

(3)　$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[2] (1)　線形写像の定義（例えば $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$, $f, g \in V$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$) に基づいて示す。

(2)　$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ のとき

$$T(f)(x) = (4A + 6B + 9C)x^2 + (4A + 7B + 12C)x + (A + 2B + 4C)$$

なので表現行列は $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ となる。この行列式は 1 となるので，T は線形同型である。

(3)　$T(x^2) = p_0$, $T(x) = p_1$, $T(1) = p_2$ であるので $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ は V の基底である。また，表現行列は $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ である。

[3] (1)　定義（任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x - y| < \delta$ を満たす $x, y \in I$ に対して $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在する）に則って記述する。

(2)　平均値の定理から $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ が成立するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon > 0$ とすると $|x - y| < \delta = \varepsilon$ であれば $|f(x) - f(y)| \le |x - y| < \varepsilon$ となる。

(3)　例えば $|f(1/n) - f(1/(n+1))| = 1$ であるから。

令和３年度（１０月期入学）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解 答 例**	
専 攻 名	数物科学専攻（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目 数学　　(２／２)

[4] (1) 極座標を用いると $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r^{2(\alpha-1)}|\cos\theta\sin\theta|(r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ であるので，$\alpha>1$ であれば $f(x,y)\to f(0,0)=0$ となる。

(2) $\alpha>0$ であるので $h\neq 0$ のとき $f(h,0)=0,\ f(0,h)=0$ である。故に $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ となる。

(3) 極座標を用いて $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta(r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ とすると

$$|f(x,y)-(f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y)| = |f(x,y)| = r^{2(\alpha-1)}|\cos\theta\sin\theta|$$

であるので，全微分可能であるための必要かつ十分条件は $r^{2(\alpha-1)}=o(r)\ (r\to 0)$，つまり，$\alpha>3/2$ である。

[5] (a) ベキ級数展開は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{-n}z^n$ であり，収束半径は $|\alpha|$。

(b) $|z|<1$ であるので，(1) より $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-in\theta}z^n$ となる。したがって

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)}{e^{i\theta}-z}e^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-in\theta}z^n d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta\right)z^n$$

となる。

[6] (1) 距離関数の定義（非負値性，非退化性，対称性，三角不等式）を確認する。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}1/n=0$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$N\in\boldsymbol{N}$ を，$1/N<\varepsilon$ が成り立つように選ぶ。このとき，$N\leq n<m$ に対して，$d(a_n,a_m)<1/N<\varepsilon$ が成り立つことから，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である。

(3) (2) で与えられた $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{N}$ 内で収束しないコーシー列である。よって，$(\boldsymbol{N},d)$ は完備でない。