

問題用紙

専攻名	機械科学専攻, 電子情報科学専攻, 環境デザイン学専攻, 自然システム学専攻・化学工学コース	
試験科目名	数学	P. (1/1)

- [注意] 1. 問題 I, II, III, IV のうち, 2題を選択して解答すること。
 2. 解答は選択問題ごとに分けて, 1題を1枚の答案用紙の表だけに書くこと。
 3. 選択問題の番号を, 各答案用紙左上の 内に記入すること。

I 問1 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{d^4y}{dx^4} - 6\frac{d^3y}{dx^3} + 11\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 18y = 0 \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

問2 微分方程式

$$(y^2 - 2xy)dx + (x^2 - xy)dy = 0 \quad (*)$$

に対し, 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $\frac{1}{x^2y}$ が (*) の積分因子となることを示せ。
 (2) 微分方程式 (*) の一般解を求めよ。

II 閉領域 $V : (a \cos u, a \sin u, v)$, $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 1$ とスカラー場 $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ を考える。次の問いに答えよ。

問1 ∇f , $\nabla \cdot \nabla f$ と $w(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ に対する $\frac{\partial w}{\partial u} \times \frac{\partial w}{\partial v}$ を求めよ。

問2 曲線 $C: r(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ に対して線積分 $\int_C \nabla f \cdot dr$ を求めよ。

問3 閉領域 V の境界表面 Γ 上の面積分 $\iint_{\Gamma} \nabla f \cdot n dS$ を求めよ。但し, n は Γ の外向きの単位法線ベクトルとする。

III 次の問いに答えよ。

問1 $0 < \left| z - \frac{i}{2} \right| < \frac{3}{2}$ を満たす複素数 z に対して,

$$\frac{z}{2z^2 - 5iz - 2} = \frac{A}{z - i/2} + \frac{B}{z - 2i}, \quad \frac{1}{z - 2i} = C + D \left(z - \frac{i}{2} \right) + O \left(\left(z - \frac{i}{2} \right)^2 \right)$$

の2式が常に成り立つように定数 A, B, C, D を定めよ。ここで $O \left(\left(z - \frac{i}{2} \right)^2 \right)$ は $\left(z - \frac{i}{2} \right)$ の2次以上のべきの和である。

問2 複素関数 $\left(\frac{z}{2z^2 - 5iz - 2} \right)^2$ の $z = \frac{i}{2}$ における留数を求めよ。

問3 $\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{\left(\frac{5}{4} - \sin \theta \right)^2} = \left(\frac{4}{3} \right)^3$ が成り立つことを示せ。

IV $f(x)$ は $f(x) = 1 + x|x|$ ($-1 < x \leq 1$) で定義される周期2の周期関数であるとする。

問1 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ を求めよ。

問2 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

問3 $\frac{1}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ を示せ。