令和３年度（１０月期）及び令和４年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 解 答 例		
専攻名	機械科学専攻，電子情報科学専攻，環境デザイン学専攻，自然システム学専攻・化学工学コース	
試験科目名	数学	P.（１／１）

I　問 1 (1): 特性方程式 $\rho^4 - 6\rho^3 + 11\rho^2 - 12\rho + 18 = (\rho-3)^2(\rho^2+2) = 0$ より $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x$　(C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数)。

問 1 (2): 同次形より $y = xu$ とすると $\dfrac{du}{dx}x = -\dfrac{u^2+1}{u+1}$ を得，これより $C = \log\sqrt{x^2+y^2} + \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (C は任意定数)。

問 2 (1): $P(x,y) = \dfrac{1}{x^2 y}(y^2 - 2xy)$ と $Q(x,y) = \dfrac{1}{x^2 y}(x^2 - xy)$ とおくと, $P_y = Q_x = \dfrac{1}{x^2}$ であるから, $\dfrac{1}{x^2 y}$ は $(*)$ の積分因子である。

問 2 (2): (1) より完全微分形 $\left(\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{2}{x}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$ を得，$C = \log\left|\dfrac{y}{x^2}\right| - \dfrac{y}{x}$ を求めることで，一般解は $y = Ax^2 e^{\frac{y}{x}}$　(A は任意定数)。

II　問 1 : $\nabla f = (2xy+z^2, 2yz+x^2, 2zx+y^2)$,　$\nabla\cdot\nabla f = 2y+2z+2x$,　$\dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial v} = (\cos u, \sin u, 0)$.

問 2 : ∇f は保存場であるために，線積分は経路に依存しない。C の始点と終点がそれぞれ $(1,0,1)$ と $(0,1,1)$ より積分は $f(0,1,1) - f(1,0,1) = 1 - 1 = 0$.

問 3 : ガウスの発散定理より積分は $\displaystyle\iint_\Gamma \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\nabla f\, dx\, dy\, dz$ となる。座標 (a,u,v) により積分は $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^{\pi/2} (2a\sin u + 2v + 2a\cos u)\, a\, du\, da\, dv = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{4}$.

III　問 1 : $2z^2 - 5iz - 2 = 2\left(z - \dfrac{i}{2}\right)(z-2i)$ より $A = \displaystyle\lim_{z\to i/2} \frac{z\left(z-\frac{i}{2}\right)}{2z^2-5iz-2} = -\frac{1}{6}$, $B = \displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{z(z-2i)}{2z^2-5iz-2} = \frac{2}{3}$.

また $C = \left.\dfrac{1}{z-2i}\right|_{z=i/2} = \dfrac{2}{3}i$,　$D = \displaystyle\lim_{z\to i/2}\left(\frac{1}{z-2i}\right)' = \frac{4}{9}$.

問 2 : $\left(\dfrac{z}{2z^2-5iz-2}\right)^2 = \dfrac{1/36}{(z-i/2)^2} + \dfrac{-2/9}{(z-i/2)(z-2i)} + \dfrac{4/9}{(z-2i)^2}$ に対して，第 2 項が $\dfrac{-2^2/3^3}{(z-i/2)}i - \dfrac{2^3}{3^4} + O\left(z - \dfrac{i}{2}\right)$,　$\left(0 < \left|z - \dfrac{i}{2}\right| < \dfrac{3}{2}\right)$ となることより，求める留数の値は $-\dfrac{4}{27}i$.

問 3 : $z = e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ で変数変換すると $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}d\theta}{\left(\frac{5}{4}-\sin\theta\right)^2} = 16i\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^2}{(2z^2-5iz-2)^2}dz$.

ここで $|2i| > 1$, $\left|\dfrac{i}{2}\right| < 1$ と問 2 の結果より，求める値は $16i \times \left(-\dfrac{4}{27}i\right) = \dfrac{4^3}{3^3}$.

IV　$x|x|$ が奇関数であることに注意すると

問 1 : $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 1\, dx = 2.$

問 2 : $n \geq 1$ のとき，同様に $x|x|$ が奇関数であることに注意すると

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^1 \cos(n\pi x)dx = 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x)\sin(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x^2\sin(n\pi x)dx = 2\left(-\frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1)\right)$$ となる。

よって，

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx + \sum_{n=1}^\infty b_n\sin(n\pi x) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(n\pi x) - \frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{(2m-1)^3}\sin((2m-1)\pi x).$$

問 3 : 問 2 の結果に $x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると得られる。